

**FREIE STRUKTUREN UND DIE GRUPPE
DER AFFINEN PROJEKTIVITÄTEN**

Den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt von

Edith Schreiber

aus Pohler/Sudetenland

1979 #273

FRÜHE STUDIENJAHRE UND DIE GRÜNDE
DER KUNSTEN PROJEKTIVITÄTEN

Digitized by the Internet Archive
in 2026

FREIE STRUKTUREN UND DIE GRUPPE DER AFFINEN PROJEKTIVITÄTEN

Den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt von

Edith Schreiber

aus Pohler/Sudetenland



Als Dissertation genehmigt von den
Naturwissenschaftlichen Fachbereichen der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der mündlichen Prüfung:

12.7.1979

Vorsitzender der Promotionskommission:

Professor Dr. E. Schweizer

Erstberichterstatter:

Professor Dr. K. Strambach

Zweitberichterstatter:

Professor Dr. A. Barlotti

1979

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	S. 3
<u>I. Teil: Klassifikation freier ebener (m,n)-Geometrien</u>	S. 6
Kap. 1 : Vorbereitende Definitionen, Axiomensystem	S. 6
Kap. 2 : Freie Erweiterungsprozesse	S. 10
Kap. 3 : Der Rang einer affinen ebenen (m,n) -Inzidenzstruktur	S. 20
Kap. 4 : J-Äquivalenz	S. 34
<u>II. Teil: Parallelprojektivitäten (affine Perspektivitäten) einer Geraden g einer freien affinen Ebene A auf sich</u>	S. 40
Kap. 5 : Vorbereitungen und Definitionen	S. 40
Kap. 6 : Parallelprojektivitäten einer Geraden g einer freien affinen Ebene A auf sich	S. 44
Literaturverzeichnis	S. 62

Einleitung

Als abgeleitete Unterstrukturen von Laguerre- und Minkowski-Ebenen treten Geometrien auf, in denen es nicht nur auf der Geradenmenge, sondern auch auf der Punktmenge Parallelismen gibt.

Da für die Untersuchung der Kreisgeometrie zunächst die Kenntnis der abgeleiteten Unterstrukturen von Nutzen ist, erscheint es zweckmäßig, sogenannte ebene (m,n) -Geometrien zu definieren und diese gesondert zu betrachten. Die (m,n) -Geometrien bestehen aus Punkten und Geraden samt Parallelismen auf der Punkt- und der Geradenmenge; ihr Charakteristikum ist, daß je zwei nichtparallele Punkte genau eine Verbindungsgerade und je zwei nichtparallele Geraden genau einen Schnittpunkt haben.

Jede solche Geometrie läßt sich als homomorphes Bild einer sogenannten freien Geometrie darstellen, die durch geeignete Erweiterungsprozesse als induktive Limites einfacher Ausgangsstrukturen entstehen. Deshalb wenden wir uns im ersten Teil dieser Arbeit der Klassifikation der freien (m,n) -Geometrien zu. Es zeigt sich, daß die einzige Invariante einer solchen Geometrie, wie dies von anderen Klassen freier Geometrien her bekannt ist, der (geeignet zu definierende) Rang ist. Wir bestimmen die isomorphen Klassen freier Geometrien dadurch, daß wir zu jedem zulässigen Rang Normalformen von frei zu erweiternden Inzidenzstrukturen angeben.

Im zweiten Teil unserer Arbeit behandeln wir die Gruppe der affinen Projektivitäten Π einer Geraden auf sich in freien affinen Ebenen. Diese Gruppe setzt sich aus affinen Perspektivitäten zusammen. Eine affine Perspektivität von einer Geraden g auf eine Gerade h ist eine Bijektion mittels einer Parallelenschar (Richtung), zu der weder g noch h gehört. In der projektiven Abschließung besteht also Π aus denjenigen Projektivitäten, die Produkte von Perspektivitäten mit Zentren auf der uneigentlichen Geraden sind. Daher ist im allgemeinen die Gruppe Π der affinen Projektivitäten kleiner als der Stabilisator der Gruppe der Projektivitäten der projektiven Abschließung auf einem Punkt.

Es wird bewiesen, daß die Standgruppe $S_n(g)$ auf n Punkten einer Geraden g einer freien affinen Ebene für $n = 4$ nur aus der Identität besteht. Für $n \leq 2$ ist der Stabilisator der Gruppe der affinen Projektivitäten eine freie Gruppe des Ranges $\aleph_0$, ebenso auf gewissen drei verschiedenen Punkten.

Die Kenntnis der Gruppe der freien Projektivitäten und ihres Permutationsverhaltens ist wichtig. Es ist nämlich klar, daß die Forderung, jedes Element $\neq 1$ der Gruppe der Projektivitäten habe wenig Fixpunkte, dazu führt, daß eine Geometrie eine klassische Darstellung besitzt. So folgt etwa aus der Tatsache, daß der Stabilisator von je zwei verschiedenen Punkten der Gruppe der Projektivitäten stets 1 ist, für die Ebene der Satz von Desargues (7). Da aber in einer freien affinen Ebene keine Schließungssätze gelten,

kann die Forderung, daß der Stabilisator auf vier verschiedenen Punkten die Identität ist, keine Gültigkeit von Konfigurationssätzen für die Ebene erzwingen. So bleiben noch diejenigen affinen Ebenen zu betrachten, in denen die Stabilisatoren der Gruppe der affinen Projektivitäten auf drei verschiedenen Punkten stets nur aus der Identität bestehen.

Für projektive Ebenen zeigt es sich nämlich, daß es keine Klasse zwischen den papposschen und den freien Ebenen gibt, die bezüglich des Verhaltens der Gruppe der Projektivitäten sich charakterisieren läßt.

In freien Ebenen hat Barlotti (4) gezeigt, daß der Stabilisator der Gruppe der Projektivitäten der projektiven Ebene auf 6 verschiedenen Punkten nur aus der Identität besteht; Schleiermacher zeigte auf der anderen Seite, daß, im Falle Stabilisator auf 5 verschiedenen Punkten die Identität ist, kein Element $\neq 1$ mehr als zwei verschiedene Fixpunkte besitzen kann und die Ebene papposch ist.

Nach unseren Untersuchungen könnte man als Vermutung den Satz von von Staudt/Schleiermacher für affine Ebenen wie folgt aussprechen:

Ist der Stabilisator der Gruppe der Projektivitäten auf drei verschiedenen Punkten stets die Identität, so ist die Ebene desarguessch.

Auch der Zusammenhang der projektiven Gruppe einer freien Ebene mit der Kollineationsgruppe wird untersucht. Es zeigt sich, daß im Gegensatz zu dem Fall desarguesscher Ebenen keine Kollineation eine Projektivität $\neq 1$ induzieren kann.

I. Teil: Klassifikation freier, ebener (m,n) -Geometrien

Kap. 1: Vorbereitende Definitionen, Axiomensystem

In diesem Abschnitt werden zunächst einige grundlegende Definitionen angegeben, die für die nachfolgenden Untersuchungen benötigt werden.

1.1 Definition:

Eine affine ebene (m,n) -Geometrie mit m Geradenparallelitäten und n Punktparallelitäten besteht aus einer Menge $\mathcal{P}$ der Punkte und einer zu $\mathcal{P}$ disjunkten Menge $\mathcal{G}$ der Geraden, m nichttrivialen Äquivalenzrelationen μ_j ($j=1, \dots, m$) auf $\mathcal{G}$ (Geradenparallelitäten), n nichttrivialen Äquivalenzrelationen ν_i ($i=1, \dots, n$) auf $\mathcal{P}$ (Punktparallelitäten) und einer Inzidenzrelation I auf $\mathcal{P} \times \mathcal{G}$. Zwei Punkte (Geraden) heißen "nichtparallel", wenn sie bezüglich keiner Relation μ_j (ν_i) parallel sind. Ansonsten heißen sie parallel. Außerdem soll eine (m,n) -Geometrie den folgenden Axiomen genügen:

- A 1: Durch zwei verschiedene nichtparallele Punkte geht genau eine Gerade. Zwei parallele Punkte sind durch keine Gerade verbunden.
- A 2: Zwei verschiedene nichtparallele Geraden haben genau einen Punkt gemeinsam. Zwei parallele Geraden haben keinen Punkt gemeinsam.
- A 3: Ist P ein Punkt und g eine Gerade, die nicht mit P inzidiert ($P \not I g$), so existiert zu P auf g genau ein ν_i -paralleler Punkt für $i = 1, \dots, n$.

- A 4: Ist g eine Gerade und P ein Punkt, so geht durch P genau eine zu g μ_j -parallele Gerade für $j = 1, \dots, m$.
- A 5: Gilt $n = 0 = m$, so gibt es vier verschiedene Punkte, von denen keine drei auf einer Geraden liegen (kollinear sind).
- Gilt $n + m > 0$, so gibt es drei nichtkollineare und nichtparallele Punkte.

1.2 Beispiele: $n = 0 = m$	projektive Ebene
$n = 0, m = 1$	affine Ebene
$n = m = 1$	dual affine Ebene

Wir werden uns im folgenden immer nur mit den (m, n) -Geometrien befassen, für die $m + n > 0$ gilt. Sämtliche Ergebnisse sind für projektive Ebenen bereits bekannt (vgl. hierzu Hughes/Piper (3) oder G. Pickert (4)).

1.3 Definition:

Eine affine ebene (m, n) -Inzidenzstruktur J mit n Punktparallelitäten und m Geradenparallelitäten besteht aus einer Menge $\mathcal{P}$ der Punkte und einer zu $\mathcal{P}$ disjunkten Menge $\mathcal{G}$ der Geraden, n nichttrivialen Äquivalenzrelationen ν_i auf $\mathcal{P}$ (Punktparallelitäten), m nichttrivialen Äquivalenzrelationen μ_j auf $\mathcal{G}$ (Geradenparallelitäten) und einer Inzidenzrelation I auf $\mathcal{P} \times \mathcal{G}$. Zwei Punkte (Geraden) heißen "nichtparallel", wenn sie bezüglich keiner Relation μ_j (ν_i) parallel sind. Ansonsten heißen sie parallel. Außerdem soll eine (m, n) -Inzidenzstruktur den folgenden Axiomen genügen:

J 1: Durch zwei verschiedene nichtparallele Punkte geht höchstens eine Gerade.

Sind A und B verschiedene ν_i -parallele Punkte, so gibt es keine Verbindungsgerade. ($i=1, \dots, n$)

J 2: Zwei verschiedene nichtparallele Geraden haben höchstens einen Schnittpunkt. Sind g und h verschiedene μ_j -parallele Geraden, so haben sie keinen Punkt gemeinsam. ($j=1, \dots, m$)

1.4 Beispiele: $n = m = 0$ projektive (ebene) Inzidenzstruktur
 $n = 0, m = 1$ affine (ebene) Inzidenzstruktur.

1.5 Definition:

Ist P ein Punkt bzw. g eine Gerade, so sei $[P]_{\nu_i}$ bzw. $[g]_{\mu_j}$ die entsprechende Äquivalenzklasse bzgl. ν_i bzw. μ_j ($i=1, \dots, n; j=1, \dots, m$).

1.6 Definition:

Sind J_1 und J_2 (m, n) -Inzidenzstrukturen mit den Punktmengen $P_{1,2}$ und den Geradenmengen $G_{1,2}$ sowie den Inzidenzrelationen I_1 bzw. I_2 , so ist J_1 eine Teilstruktur von J_2 ($J_1 \leq J_2$), wenn gilt:

1. Es ist $P_1 \subseteq P_2$ und $G_1 \subseteq G_2$;
2. für $P \in P_1$ und $h \in G_1$ ist $P I_1 h$ mit $P I_2 h$ gleichwertig, d.h. ist die Restriktion von I_2 auf $P_1 \times G_1$;
3. wenn zusätzliche Relationen vorkommen, so sind die in J_1 gegebenen Relationen Restriktionen der entsprechenden Relationen von J_2 .

1.7 Definition:

Durch eine Folge $J_0 \leq J_1 \leq J_2 \leq \dots \leq J_n \leq \dots$ von Inzidenzstrukturen J_ν (ν durchläuft alle Ordnungszahlen $< \mu$) ist ein Erweiterungsprozeß $\mathcal{E}$ gegeben, wenn die Elemente aus J_ν , die in keinem J_λ mit $\lambda < \nu$ vorkommen, weder untereinander Inzidenzen eingehen, noch zueinander parallel sind. Die Inzidenzstruktur $J = \bigcup_{\nu < \mu} J_\nu$ bezeichnen wir dann mit $\mathcal{E}(J_0)$. Sie heißt das Resultat des Erweiterungsprozesses $\mathcal{E}$.

1.8 Definition:

Die $\mathcal{E}$ -Stufe eines Elementes $x \in \mathcal{E}(J_0)$ wird als die kleinste Ordnungszahl ν definiert, für die noch $x \in J_\nu$ gilt. Die Träger eines Elementes x der $\mathcal{E}$ -Stufe $\nu > 0$ sind die Elemente y von kleinerer $\mathcal{E}$ -Stufe mit $x \bar{\parallel} y$ oder $x \parallel y$.

Kap. 2: Freie Erweiterungsprozesse

Ähnlich wie bei Schleiermacher/Strambach (6) werden nun freie und hyperfreie Erweiterungsprozesse definiert.

2.1 Definition:

Ein Punkt P einer (m,n) -Inzidenzstruktur J heißt hyperfrei in J , wenn

1. durch ihn keine drei verschiedene Geraden gehen und zu P keine parallelen Punkte $\neq P$ existieren;
2. durch ihn keine zwei verschiedene Geraden gehen und zu P parallele Punkte existieren, die höchstens einer Parallelklasse angehören;
3. durch ihn keine Geraden gehen und zu P parallele Punkte existieren, die höchstens zwei verschiedenen Klassen angehören.

Ein Punkt P heißt frei in J , wenn

1. durch ihn genau zwei verschiedene Geraden gehen und keine parallelen Punkte $\neq P$ existieren;
2. durch ihn genau eine Gerade geht und parallele Punkte $\neq P$ aus genau einer Klasse existieren;
3. durch ihn keine Gerade geht und parallele Punkte aus zwei verschiedenen Klassen existieren.

2.2 Definition:

Eine Gerade g einer (m,n) -Inzidenzstruktur J heißt hyperfrei in J , wenn

1. sie keine drei verschiedenen Punkte trägt und keine parallelen Geraden $\neq g$ existieren;
2. sie keine zwei verschiedenen Punkte trägt und zu g parallele Geraden existieren, die höchstens einer Parallelklasse angehören;
3. sie keine Punkte trägt und zu g parallele Geraden existieren, die höchstens zwei verschiedenen Klassen angehören.

Eine Gerade g heißt frei in J , wenn

1. sie genau zwei Punkte trägt und keine parallelen Geraden $\neq g$ existieren;
2. sie genau einen Punkt trägt und parallele Geraden $\neq g$ aus genau einer Klasse existieren;
3. sie keinen Punkt trägt und parallele Geraden aus genau zwei verschiedenen Klassen existieren.

2.3 Definition:

Ein Erweiterungsprozeß $\mathcal{E} : J_0 \leq J_1 \leq J_2 \leq \dots$ heißt hyperfrei, wenn alle Elemente einer Stufe $k > 0$ in J_k hyperfrei sind. Sind alle Elemente der Stufe $k > 0$ in J_k sogar frei und ist außerdem jede Parallelenschar $[g]$ bzw. jede Parallelenschar $[P]$ von J_k , die keine Geraden bzw. Punkte von J_j mit $j < k$ enthält, trivial (d.h. besteht $[g]$ allein aus g bzw. $[P]$ allein aus P), so heißt der Erweiterungsprozeß $\mathcal{E}$ frei.

Die (m,n) -Inzidenzstruktur J heißt hyperfreie (freie) Erweiterung von J_0 , wenn es einen hyperfreien (freien) Erweiterungspro $\mathcal{E} : J_0 \leq J_1 \leq \dots$ mit $\mathcal{E}(J_0) = J$ gibt.

2.4 Definition:

Eine (m,n) -Inzidenzstruktur J heißt geschlossen, wenn J nicht leer und endlich ist und keine hyperfreien Elemente besitzt.

Eine (m,n) -Inzidenzstruktur J , die keine geschlossenen Unterstrukturen besitzt, heißt offen.

Ist $|p + g| < \infty$, so sprechen wir auch von einer offenen bzw. geschlossenen Konfiguration $\mathcal{K}$.

Wie bei Schleiermacher/Strambach (6) lassen sich auch hier zwei analoge Sätze über geschlossene und offene (m,n) -Inzidenzstrukturen beweisen.

2.5 Hilfssatz:

Ist J eine geschlossene Unterstruktur einer hyperfreien Erweiterung $\mathcal{E}(J_0)$ von J_0 , so folgt $J \leq J_0$.

Beweis: Da J endlich und nicht leer ist, gibt es in J ein Element x maximaler Stufe v . Wäre $v > 0$, so wäre x hyperfrei in J_v und somit erst recht hyperfrei in der Teilstruktur J von J_v , was nicht sein kann.

2.6 Hilfssatz:

Jede endliche, offene ebene (m,n) -Inzidenzstruktur J ist hyperfrei.

Beweis: Wenn J leer ist, sind wir fertig;

andernfalls gibt es in J ein hyperfreies Element x und J ist hyperfreie Erweiterung der echten Unterstruktur $J_1 \triangleleft J$, die aus allen von x verschiedenen Elementen von J besteht. Durch Induktion können wir annehmen, daß J_1 hyperfrei sei, und daher ist auch J hyperfrei.

2.7 Der natürliche freie Erweiterungsprozeß I

Es sei J_0 eine affine ebene (m,n) -Inzidenzstruktur mit

1. In J_0 gibt es Punkte, die keine Verbindungsgerade haben und nicht parallel sind.
2. Für $m = 0 = n$ enthält J_0 vier verschiedene Punkte, von denen keine drei kollinear sind.
3. Für $m + n > 0$ enthält J_0 drei nichtkollineare und nicht-parallele Punkte.

Wir definieren eine Folge ebener Inzidenzstrukturen in vier Rekursionsschritten, von denen mindestens zwei stets zu einer echten Oberstruktur führen.

1. Es sei J_{4r} bereits definiert.

Zu jedem Punktepaar $P \neq Q$ aus J_{4r} mit $P \not\sim Q$, das in J_{4r} keine Verbindungsgerade besitzt, fügt man eine Gerade g hinzu, die nur mit P und Q inzidiert, also mit keinem anderen Punkt und nicht zu irgendeiner anderen Geraden parallel ist.

So erhält man die Inzidenzstruktur J_{4r+1} .

2. Sei J_{4r+1} bereits definiert.

Zu jeder v_i -Parallelklasse $[i]_{v_i}$ und jeder Geraden g ,

die noch keinen Punkt von $[r]_{\nu_i}$ trägt, fügt man einen solchen Punkt hinzu, der nur mit g inzidiert und $[1]_{\nu_i}$ angehört. Das tue man für $i=1, \dots, n$.

So erhalten wir die Inzidenzstruktur J_{4r+2} .

3. Sei J_{4r+2} bereits definiert.

Zu jeder μ_i -Parallelschar $[g]_{\mu_i}$ von Geraden und jedem Punkt P , durch den noch keine Gerade aus $[g]_{\mu_i}$ geht, fügen wir eine solche Gerade hinzu, die nur mit P inzidiert.

So erhalten wir die Inzidenzstruktur J_{4r+3} .

4. Sei J_{4r+3} bereits definiert.

Jedem Paar nichtparalleler Geraden g und h , die sich in J_{4r+3} nicht schneiden, geben wir einen Schnittpunkt, der nur mit g und h inzidiert.

So erhalten wir die Inzidenzstruktur J_{4r+4} .

Durch die Folge $J_0 \leq J_1 \leq J_2 \leq \dots$ wird ein freier Erweiterungsprozeß definiert.

Er heißt der natürliche freie Erweiterungsprozeß von J_0 und wird mit $\mathbb{I}(J_0)$ bezeichnet.

2.8 Beispiele möglicher J_0

(projektiv)

(affin)

2.9 Satz:

Hat die Inzidenzstruktur J_0 die Eigenschaft (A5), so ist $\mathbb{I}(J_0)$ eine (m,n) -Geometrie. Man nennt sie die von der Struktur J_0 erzeugte (m,n) -Geometrie.

Beweis:

Es seien P_1 und P_2 zwei verschiedene, nichtparallele Punkte mit den Stufen $s(P_1) = \alpha_1$ und $s(P_2) = \alpha_2$. Wir wählen die kleinste Zahl ν , so daß gilt: $4\nu + 1 > \max(\alpha_1, \alpha_2)$. Dann enthält $J_{4\nu+1}$ genau eine Gerade, die nur mit P_1 und P_2 inzidiert; damit ist Axiom i) erfüllt.

Es seien g_1 und g_2 zwei verschiedene, nichtparallele Geraden mit den Stufen $s(g_1) = \alpha_1$ und $s(g_2) = \alpha_2$. Wir wählen die kleinste Zahl ν , so daß gilt: $4\nu > \max(\alpha_1, \alpha_2)$. Dann enthält $J_{4\nu}$ genau einen Punkt, der nur mit g_1 und g_2 inzidiert; damit ist Axiom iv) erfüllt.

Es sei P ein Punkt der Stufe $s(P) = \alpha_1$ und g eine Gerade der Stufe $s(g) = \alpha_2$. Wählen wir die kleinste Zahl ν , so daß gilt: $4\nu + 3 > \max(\alpha_1, \alpha_2)$, dann enthält $J_{4\nu+3}$ genau eine Gerade, die mit P inzidiert und zu g parallel ist, wodurch Axiom iii) erfüllt ist.

Es sei g eine Gerade der Stufe $s(g) = \alpha_1$ und P ein Punkt der Stufe $s(P) = \alpha_2$. Wählen wir die kleinste Zahl ν , so daß gilt: $4\nu + 2 > \max(\alpha_1, \alpha_2)$, dann enthält $J_{4\nu+2}$ genau einen Punkt, der mit g inzidiert und zu P parallel ist, wodurch Axiom ii) erfüllt ist.

2.10 Definition:

Ist J_0 eine offene Konfiguration, so heißt $\mathbb{I}(J_0)$ die natürliche freie (m,n) -Geometrie.

2.11 Satz:

Jede Unterstruktur einer freien (m,n) -Geometrie ist frei.

Beweis:

Ist $\mathbb{I}(J_0)$ eine freie (m,n) -Geometrie mit dem Erweiterungsprozeß $J_0 \leq J_1 \leq \dots \leq J_n \leq \dots$, dann gilt für jede Unterstruktur J' von $\mathbb{I}(J_0)$, daß der Erweiterungsprozeß $J_0 \cap J' \leq J_1 \cap J' \leq \dots \leq J_n \cap J' \leq \dots$ ein freier Erweiterungsprozeß für J' ist.

2.12 Bemerkung:

Es sei J eine (m,n) -Geometrie und J' eine Unterstruktur von J . Die von J' erzeugte (m,n) -Geometrie wird als kleinste (m,n) -Geometrie J^* mit $J' \leq J^* \leq J$ definiert, so daß für eine (m,n) -Geometrie J'' aus $J' \leq J'' \leq J$ stets $J^* \leq J''$ folgt.

2.13 Satz:

Es sei J eine (m,n) -Geometrie, die erzeugt wird von einer Inzidenzstruktur J_0 . Ist $\mathbb{I}(J_0)$ eine freie (m,n) -Geometrie, die erzeugt wird von J_0 , so ist J homomorphes Bild von $\mathbb{I}(J_0)$.

Beweis:

Um einen Homomorphismus zu definieren, werden entsprechend den J_m auch J'_m für J gebildet:

Es sei $J^0 = J_0$. Ist $J^{4v} \subseteq \mathbb{I}(J_0)$ bereits definiert, so fügen wir zu J^{4v} alle in $\mathbb{I}(J_0)$ liegenden Verbindungsgeraden von Punktpaaren $P \neq Q$ aus J^{4v} hinzu und erhalten J^{4v+1} .

Ist $J^{4v+1} \subseteq \mathbb{I}(J_0)$ bereits definiert, so fügen wir zu J^{4v+1} alle in $\mathbb{I}(J_0)$ liegenden parallelen Punkte zu jeder Parallelklasse $[P]_{v_i}$ und jeder Geraden g aus J^{4v+1} , die noch keinen Punkt von P trägt, hinzu und erhalten J^{4v+2} .

Ist $J^{4v+2} \subseteq \mathbb{I}(J_0)$ bereits definiert, so fügen wir zu J^{4v+2} alle in $\mathbb{I}(J_0)$ liegenden parallelen Geraden zu jeder Parallelklasse $[g]$ und jedem Punkt P aus J^{4v+2} , der mit keiner Geraden von g inzidiert, hinzu und erhalten J^{4v+3} .

Ist $J^{4v+3} \subseteq \mathbb{I}(J_0)$ bereits definiert, so fügen wir zu J^{4v+3} alle in $\mathbb{I}(J_0)$ liegenden Schnittpunkte von Geradenpaaren $g \neq h$ aus J^{4v+3} hinzu und erhalten J^{4v+4} .

Wir definieren nun rekursiv die Abbildungen φ wie folgt:

$$\varphi_0: J_0 \rightarrow J_0 = J^0 \text{ mit } \varphi = \text{Id.}$$

$\varphi_{4v}: J_{4v} \rightarrow J^{4v}$ mit $(g \cap h)^\varphi = g^\varphi \cap h^\varphi$ für $g, h \in J_{4v}$ im Falle $g \neq h$, während sonst für $(g \cap h)$ irgendein auf g liegender Punkt von J^{4v} genommen wird.

$\varphi_{4v+1}: J_{4v+1} \rightarrow J^{4v+1}$ mit $Q \rightarrow Q^\varphi$ für $Q \in [P]$ und $Q^\varphi \in [P]^\varphi$ sowie $Q \cap g$ und $Q^\varphi \cap g^\varphi$.

$\varphi_{4v+2}: J_{4v+2} \rightarrow J^{4v+2}$ mit $g \rightarrow g^\varphi$ für $g \in [h]$ und $g^\varphi \in [h]^\varphi$ sowie $g \cap P$ und $g^\varphi \cap P^\varphi$.

$\varphi_{4v+3}: J_{4v+3} \rightarrow J^{4v+3}$ mit $(P, Q) = (P^\varphi, Q^\varphi)$ für $(P, Q) \in J_{4v+3}$ im Falle $P \neq Q$, während sonst für (P, Q) irgendeine durch P gehende Gerade von J^{4v+3} genommen wird.

2.14 Satz:

Sind zwei (m,n) -Geometrien $\mathbb{I}_1$ und $\mathbb{I}_2$ freie Erweiterungen derselben (m,n) -Inzidenzstruktur K_0 , so sind sie isomorph. Es gibt einen Isomorphismus von $\mathbb{I}_1$ auf $\mathbb{I}_2$, bei dem K_0 fest bleibt.

Beweis:

Ist K_0 schon eine (m,n) -Geometrie, so ist K_0 nicht mehr echt frei erweiterbar, und wir sind fertig.

Wir dürfen also annehmen, daß es zwei echte freie Erweiterungsprozesse $\mathbb{I}_1$ und $\mathbb{I}_2$ gibt mit $\mathbb{I}_1: K_0 \leq K_1 \leq \dots$ und

$\mathbb{I}_2: K_0 = L_0 \leq L_1 \leq \dots$ sowie $\mathbb{I}_1(K_0) = \mathbb{I}_2(K_0)$.

Es sei nun ϕ_0 die identische Abbildung in K_0 .

Ausgehend von ϕ_0 können wir nun eine Folge von injektiven Abbildungen definieren.

Es sei x^* ein Element der Stufe m in K_m , und sei die Abbildung $\phi_{m-1}: K_{m-1} \rightarrow L_n$ für ein gewisses n bereits definiert. Dann gibt es zu den $\mathbb{I}_1$ -Trägern in K_{m-1} isomorphe Bilder in einer Teilstruktur von L_n . In einer Oberstruktur von L_n muß es nun ein Element y geben, welches genau diese Bilder als $\mathbb{I}_2$ -Träger hat. Wir erweitern nun ϕ_{m-1} in der Weise, daß wir allen Elementen x aus K_m , welche noch nicht in K_{m-1} enthalten sind, das auf diese Art eindeutig bestimmte Element y in einer Oberstruktur von L_n zuordnen, und wir erhalten so die injektive Abbildung ϕ_m .

Strebt m gegen Unendlich, so wird eine injektive Abbildung definiert, die $\mathbb{I}_1(K_0)$ auf eine isomorphe Teilstruktur $L \leq \mathbb{I}_2(L_0)$ abbildet. Dabei bleibt $K_0 = L_0$ unter ϕ fest.

ebenso läßt sich ausgehend von $\sigma'_0 = \sigma$ eine injektive Abbildung σ' definieren, die $\mathbb{I}_2(L_0)$ auf eine isomorphe Teilstruktur $K \leq \mathbb{I}_2 K_0$ abbildet.

Damit ist der Satz bewiesen.

Somit können zwei von der gleichen (m,n) -Inzidenzstruktur ausgehende freie Erweiterungsprozesse sich nur darin unterscheiden, daß die neu hinzukommenden Elemente in einer unterschiedlichen Reihenfolge hinzugefügt werden.

Anmerkung (*) : An dieser Stelle können mit x und y sowohl Punkte als auch Geraden bezeichnet werden.

Kap. 3: Der Rang einer affinen ebenen (m,n) -Inzidenzstruktur

Auch bei den hier betrachteten affinen ebenen (m,n) -Inzidenzstrukturen läßt sich wie bei Pickert (4) oder Schleiermacher/Strambach (6) eine Abbildung von der Menge der endlichen (m,n) -Inzidenzstrukturen in die Menge der ganzrationalen Zahlen angeben, die bei freier Erweiterung einer Inzidenzstruktur invariant bleibt, und die wir ebenso mit Rang bezeichnen wollen.

3.1 Definition:

Unter der Bündelzahl s_p oder s_g eines Punktbündels $[P]$ oder eines Geradenbündels $[g]$ verstehen wir die Zahl k , wenn in $[P]$ oder $[g]$ genau $k+1$ Punkte bzw. Geraden vorhanden sind. Die Bündelzahl einer (m,n) -Inzidenzstruktur J mit einer endlichen Anzahl von Punkten und Geraden ist die Summe der Bündelzahlen aller Parallelbündel.

3.2 Definition:

Der Rang einer endlichen affinen ebenen (m,n) -Inzidenzstruktur J mit p Punkten, g Geraden, i Inzidenzen, m Parallelklassen auf der Geradenmenge, n Parallelklassen auf der Punktmenge, den Bündelzahlen s_p und s_g ist die Zahl

$$r = (2-n)p + (2-m)g - i + (ng-s_p) + (mg-s_g)$$

oder

$$r = 2(p+g) - i - s \quad \text{für } s = s_p + s_g$$

3.3 Hilfssatz:

Ist x ein hyperfreies Element einer (m,n) -Geometrie, so gilt $0 \leq r(x) \leq 2$. Das Element x ist genau dann frei, wenn $r(x) = 0$ gilt.

Beweis:

Ist x hyperfreier Punkt in J , so gilt: $r(x) = (2-n)1-i+(n-s_p) = 2-i-s_p$. Es sind folgende Fälle möglich:

i) $0 \leq i \leq 2$ und $s_p = 0$,

dann ist $r(P) \leq 2$

x ist frei, wenn $i = 2$ und somit $r = 0$ gilt;

ii) $0 \leq i \leq 1$ und $0 \leq s_p \leq 1$,

dann ist $r(P) \leq 2$

x ist frei, wenn $i = 1$ und $s_p = 1$ und somit $r = 0$ gilt;

iii) $i = 0$ und $s_p \leq 2$,

dann ist $r(P) \leq 2$

x ist frei, wenn $i = 0$ und $s_p = 2$ und somit $r = 0$ gilt.

Ist x hyperfreie Gerade in J , so geht man analog vor.

3.4 Hilfssatz:

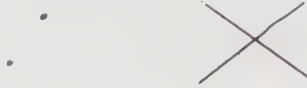
Ist $m + n > 0$, so läßt sich eine (m,n) -Inzidenzstruktur nicht erweitern, wenn eine der folgenden Bedingungen (bzw. der dualen Bedingungen) gilt:

i) $|p + g| \leq 1$ (m, n beliebig)

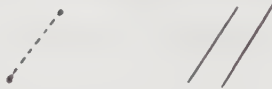
ii) $|p + g| = 2$ und

a) die Struktur besteht aus zwei nichtparallelen

Punkten(Geraden) $P \neq Q$ ($g \neq h$), m und n sind beliebig;



b) die Struktur besteht aus zwei parallelen Punkten
(Geraden) $P \parallel Q$ ($g \parallel h$), m und n sind beliebig;



c) die Struktur besteht aus einem inzidenten Punkt-
Geradenpaar und m und n sind beliebig;



d) die Struktur besteht aus einem nicht-inzidenten
Punkt-Geradenpaar und es gilt $m = 0$, n beliebig oder
 $n = 0$, m beliebig oder $m = n = 1$



iii) $|p + g| = k \geq 3$

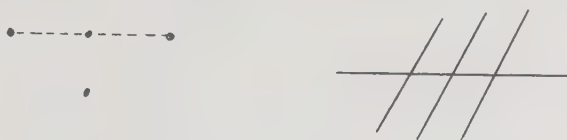
a) alle k Elemente sind entweder nur Punkte oder nur
Geraden und gehören derselben Klasse an oder sind alle
irgendwie zueinander parallel, m und n sind beliebig;



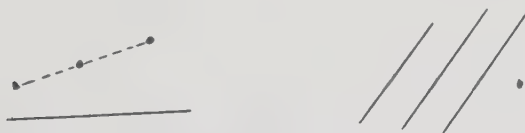
b) $k-1$ Elemente inzidieren mit einem gemeinsamen
Element, m und n sind beliebig;



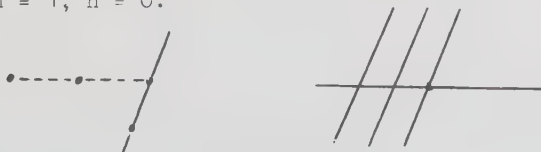
c) $k-1$ Punkte (Geraden) gehören derselben Klasse an, ein Punkt (eine Gerade) ist zu ihnen nicht parallel und es gilt $n = 1$, $m = 0$ bzw. $m = 1$, $n = 0$



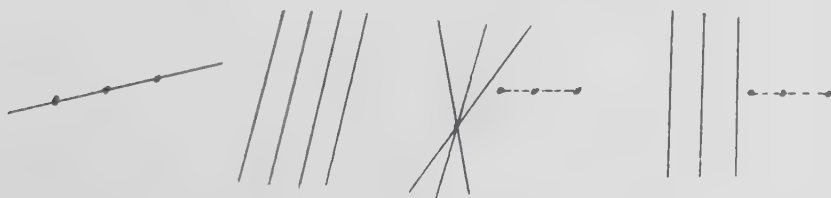
d) $k-1$ Punkte (Geraden) gehören derselben Klasse an, außerdem gibt es eine Gerade (einen Punkt) und es gilt $n = 1$, $m \in \{0, 1\}$ bzw. $m \in \{0, 1\}$, $n = 1$,



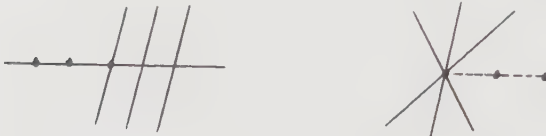
e) $k-2$ Punkte (Geraden) sind Elemente einer Klasse und eine Gerade (ein Punkt) inzidiert mit zwei verschiedenen Punkten (Geraden), und es gilt $n = 1$, $m = 0$ bzw. $m = 1$, $n = 0$.



f) $k-i$ Punkte (Geraden) gehören einer Klasse an und $i-1$ Geraden (Punkte) inzidieren mit einem gemeinsamen Element oder die Geraden gehören einer Parallelklasse an und es gilt $n = 1$, $m = 0$ (bzw. $m = 1$, $n = 0$), wenn die Geraden (Punkte) nicht parallel sind und $m = 1 = n$, wenn die Geraden (Punkte) parallel sind;



g) $k-i$ Punkte (Geraden) gehören einer Klasse an und i Geraden (Punkte) inzidieren mit einem gemeinsamen Element oder die Geraden gehören einer Parallelklasse an und es gilt $n = 1, m = 0$ (bzw. $m = 1, n = 0$), wenn die Geraden (Punkte) nicht parallel sind und $m = 1 = n$, wenn die Geraden (Punkte) parallel sind.

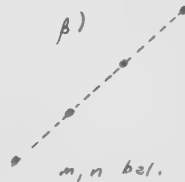
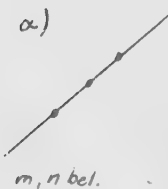


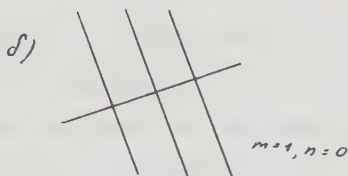
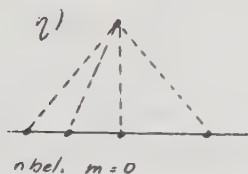
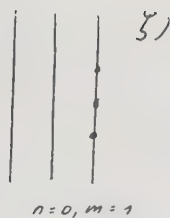
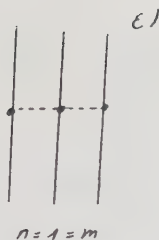
h) Es gibt ein nicht-inzidentes Punkt-Geradenpaar und $k-2$ Punkte (Geraden), die mit der Geraden (dem Punkt) inzidieren und zu dem anderen Punkt (der Geraden) parallel sind und es gilt $n \geq k-2, m = 0$ bzw. $m \geq k-2, n = 0$.



Beweis:

Es ist leicht zu sehen, daß die Strukturen i), ii) sowie iii) a) - h) nicht erweiterungsfähig sind. Nach höchstens drei Erweiterungsschritten erhält man Strukturen folgender Art, wobei die Anzahl der Geraden oder die Anzahl der Punkte verschieden sein können:





und dual

Angenommen es gebe noch eine weitere, nicht erweiterungsfähige Struktur B. Ist $|p + g| = 2$, so muß sie verschieden von ii)a) - ii)d) sein. Dies ist für ii)d) möglich, wenn andere Bedingungen über m und n gelten; dann wird aber die Struktur immer erweiterungsfähig.

Ist $|p + g| = 3$ und besteht J

1. aus drei verschiedenen Punkten, dann müssen mindestens zwei Punkte nicht kollinear sein, andererseits können aber höchstens zwei Punktepaare nicht kollinear sein. Der erste Fall führt für $m = 0, n = 1$ zu iii)d) und ist für $m+n > 1$ erweiterungsfähig; der zweite Fall führt zu iii)h) für $n \geq 2, m = 0$ und für $n \geq 2, m > 0$ ist die Struktur erweiterungsfähig;
2. aus zwei Punkten und einer Geraden. Es sind folgende Strukturen möglich, die jeweils nach höchstens zwei Erweiterungsschritten auf den darunter angegebenen Typ führen;

wenn die entsprechenden Bedingungen über m und n gelten, sonst sind sie erweiterungsfähig:



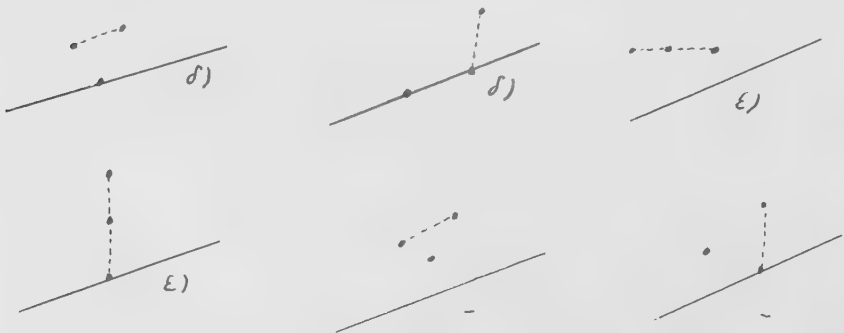
3. Gilt $|g| = 2$ und $|p| = 1$ bzw. $|g| = 3$, so gelten die dualen Aussagen von 2. und 1.

Ist $|p + g| = k > 3$ und angenommen, es gebe noch eine weitere, nicht erweiterungsfähige Struktur B , verschieden von iii)a) - iii) h). Wir wählen eine Teilkonfiguration B' , mit $|B'| = 4$. Da B nicht erweiterungsfähig ist, darf auch B' nicht erweiterungsfähig sein. Unterscheidet sich B' nur in den Bedingungen über m und n von iii)a) - g), so ist B' erweiterungsfähig.

Somit wären nur folgende Konfigurationen möglich:

a) B' besteht nur aus Punkten. Dann dürfen höchstens zwei nichtparallele Punktepaaire existieren, durch die zwei verschiedene Geraden gehen. Ist $m + n = 1$, so erhalten wir dieselbe Struktur wie aus iii)c). Ist $m + n > 1$, so wird J erweiterungsfähig.

b) B' besteht aus 3 Punkten und einer Geraden. Gilt $m + n = 1$, so dürfen nicht jeweils zwei Punkte nichtkollinear sein. Es sind folgende sechs Fälle möglich:



Sie entsprechen jeweils dem angegebenen Typ und sind bis auf die letzten zwei Strukturen, wenn die entsprechenden Bedingungen über m und n gelten, daher nicht erweiterungsfähig. Gelten andere Bedingungen über m und n , werden sie erweiterungsfähig. Die letzten beiden Strukturen sind für $n \geq 1$ und m beliebig immer erweiterungsfähig.

c) B' besteht aus zwei Punkten und zwei Geraden. Die Bedingungen iii)f) und iii)g) dürfen nicht erfüllt sein. Es ist nur eine von iii)f) und iii)g) bzw. ihren dualen Bildern verschiedene Konfiguration möglich: Punkte und Geraden sind nicht parallel und nicht inzident.

Für $m + n > 1$ ergeben sich aber mindestens drei (bzw. vier) nichtkollineare Punkte und damit ist B' erweiterungsfähig.

d) Besteht B' aus einem Punkt und drei Geraden, so sind sämtliche Konfigurationen dual zu b).

e) Besteht B' aus vier Geraden, so sind sämtliche Konfigurationen dual zu a).

3.5 Satz:

Ist J endlich und eine hyperfreie Erweiterung von J_0 , so ist $r(J_0) \leq r(J)$. Es gilt $r(J_0) = r(J)$ genau dann, wenn J freie Erweiterung von J_0 ist.

Beweis:

Nach Satz 3.3 haben hyperfreie Punkte und Geraden einen Rang ≤ 2 . Es gilt $r(g) = 0$ bzw. $r(P) = 0$ genau dann, wenn g und P freie Elemente sind.

3.6 Satz:

Eine endliche, ebene, affine ebene (a,n) -Inzidenzstruktur J mit der Eigenschaft A5 hat einen Rang

$$r(J_{0,0}) \geq 8$$

$$r(J_{1,0}) \geq 6$$

$$r(J_{0,1}) \geq 6$$

$$r(J_{\infty,1}) \geq 5$$

$$r(J_{\infty,0}) \geq 5$$

$$r(J_{0,2}) \geq 5$$

$$r(J_{\infty,1}) \geq 4$$

$$r(J_{1,2}) \geq 4$$

$$r(J_{m,n}) \geq 3 \quad m \text{ bel. } n \geq 3 \text{ oder } n \text{ bel., } m \geq 3,$$

wobei $J_{m,n}$ eine Inzidenzstruktur mit m Parallelklassen auf der Geradenmenge und n Parallelklassen auf der Punktmenge sein soll.

Beweis:

Der Beweis wird nur für $m + n \geq 1$ gebracht. Für projektive Ebenen ist der Satz bekannt, vgl. hierzu Pickert (4) oder Hughes/Piper (3).

J ist hyperfrei.

1. Ist $|p + g| = 2$,

so gibt es nur eine erweiterungsfähige Struktur

für $m \geq 1, n \geq 1$ oder $m \geq 1, n \geq 1$ und es gilt $r(J) = 4$.

2. Ist $|p + g| = 3$ und angenommen es sei

$2(p + g) - i - s < r_{m,n}$ für $s = s_p + s_g$ und $r_{m,n} = r(J_{m,n})$
dann gilt $i + s > 6 - r_{m,n}$

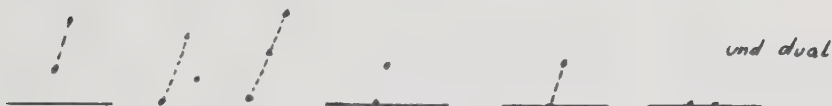
In jedem Fall gilt: $0 \leq i \leq 2$

und $0 \leq s \leq 3$.

a) Ist $m + n = 1$, so folgt $i + s > 0$.

Daher muß für $i = 0$ gelten $s \geq 1$

und für $i \geq 1$ gelten $s \geq 0$



Keine dieser oder ihrer dualen Strukturen ist erweiterungsfähig.

b) Ist $m = 1 = n$, so folgt $i + s > 1$.

Daher kann folgendes gelten: $i = 0$ und $s \geq 2$

$i = 1$ und $s \geq 1$

$i > 1$ und $s \geq 0$,

was zu folgenden Strukturen führt:



wovon keine Struktur, auch nicht die duale erweiterungsfähig ist.

c) Ist $n = 2$ und $m = 0$, so folgt $i + s > 1$.

Daher kann folgendes gelten: $i = 0$ und $s \geq 2$

$i = 1$ und $s \geq 1$

$i > 1$ und $s \geq 0$,

was zu folgenden Strukturen führt:



d) Ist $m = 2$ und $n = 0$, so erhält man die zu c) duale Struktur.

e) Ist $n = 2$ und $m = 1$, so folgt $i + s > 2$.

Daher kann folgendes gelten: $i = 0$ und $s \geq 3$

$i = 1$ und $s \geq 2$

$i = 2$ und $s \geq 1$,

was zu folgender Struktur führt:



f) Ist $m = 2$ und $n = 1$, so erhält man die zu e) duale Struktur.

g) Ist n bel. und $m \geq 3$, so folgt $i + s > 3$,

was zu keiner Struktur führt.

h) Ist m bel. und $n \geq 3$, so folgt $i + s > 3$,

was ebenfalls zu keiner Struktur führt.

3. Ist $|p + g| = 4$ und angenommen es sei

$2(p + g) - i - s < r_{m,n}$ für $s = s_p + s_g$ und $r_{m,n} = r(J_{m,n})$

dann gilt $i + s > 8 - r_{m,n}$

In jedem Fall gilt: $0 \leq i \leq 3$

und

$0 \leq s \leq 6$.

a) Ist $m + n = 1$, so folgt $i + s > 2$.

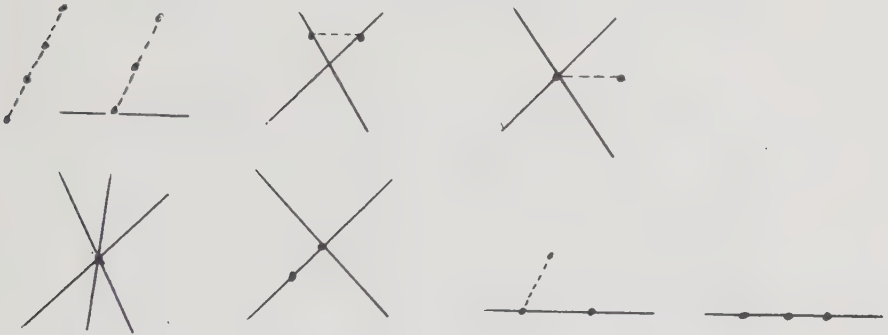
Daher kann folgendes gelten: $i = 0$ und $s \geq 3$

$i = 1$ und $s \geq 2$

$$i = 2 \text{ und } s \geq 1$$

$$i = 3 \text{ und } s \geq 0,$$

was zu folgenden Strukturen führt:



b) Ist $m = 1 = n$, so folgt $i + s > 3$.

Daher kann folgendes gelten: $i = 0$ und $s \geq 4$

$$i = 1 \text{ und } s \geq 3$$

$$i = 2 \text{ und } s \geq 2$$

$$i = 3 \text{ und } s \geq 1,$$

was zu folgender Struktur führt:



c) Ist $n = 2$ und $m = 0$, so folgt $i + s > 3$.

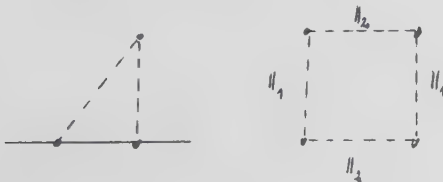
Daher kann folgendes gelten: $i = 0$ und $s \geq 4$

$$i = 1 \text{ und } s \geq 3$$

$$i = 2 \text{ und } s \geq 2$$

$$i = 3 \text{ und } s \geq 1,$$

was zu folgenden Strukturen führt:



d) Ist $n = 0$ und $m = 2$, so erhält man die zu c) dualen Strukturen.

e) Ist $n = 2$ und $m = 1$, so folgt $i + s \geq 4$.

Daher kann folgendes gelten: $i = 0$ und $s \geq 5$

$i = 1$ und $s \geq 4$

$i = 2$ und $s \geq 3$

$i = 3$ und $s \geq 2$,

was zu keiner Struktur führt.

f) Der Fall $m = 2$ und $n = 1$ verhält sich dual zu e)

g) Ist n bel. und $m \geq 3$, so folgt $i + s \geq 5$.

Daher kann folgendes gelten: $i = 0$ und $s \geq 6$

$i = 1$ und $s \geq 5$

$i = 2$ und $s \geq 4$

$i = 3$ und $s \geq 3$,

was zu folgenden Strukturen führt:



4. Ist $|p + g| \geq 4$ und gilt $r_{m,n} < k$, wobei k der zu einem bestimmten m und n gehörende Rang sein soll, so gilt für jede Teilstruktur $J' \leq J$ mit $|p + g|_{J'} = 4$ auch

$r'_{m,n} = k-1$,

d.h. es muß gelten $r_{m,n} = k-1 = r'_{m,n}$

und J ist nicht erweiterungsfähig.

Keine Inzidenzstruktur J mit $r(J)$ kleiner als angegeben erfüllt das Axiom A5. Sie lassen sich alle nach einem Erweiterungsschritt in eine Inzidenzstruktur des Typs $\alpha)$ - $\delta)$ von Hilfssatz 3.4 umformen und sind nicht erweiterungsfähig.

Da durch Hinzufügen hyperfreier, nichtfreier Elemente der Rang vergrößert wird, sind wir fertig.

Kap. 4: J-Äquivalenz

Wir wollen nun untersuchen, wann das Resultat des Erweiterungsprozesses $\mathbb{I}$, ausgehend von zwei verschiedenen Inzidenzstrukturen, bis auf Isomorphie das gleiche ist. Solche Strukturen nennen wir frei-äquivalent. Für sie wird sich zeigen, daß jede freie m - n -Geometrie als freie Erweiterung einer Inzidenzstruktur, bestehend aus einer Geraden g , einem Punkt $P \in g$ und einer endlichen Menge von Punkten oder für n bel., $m \geq 3$ bzw. m bel. $n \geq 3$ einer Geraden g , zwei Punkten P_1 und $P_2 \in g$, zwei Punkten Q_1 und $Q_2 \in g$, mit $Q_1 \neq Q_2$ und $P_1 \neq P_2$ betrachtet werden kann.

4.1 Definition:

Zwei affine ebene (m,n) -Inzidenzstrukturen J_1 und J_2 heißen J-äquivalent, wenn $\mathbb{I}(J_1)$ und $\mathbb{I}(J_2)$ isomorph sind.

4.2 Satz:

Zwei endliche (m,n) -Inzidenzstrukturen K und L sind genau dann J-äquivalent, wenn sie eine endliche isomorphe freie Erweiterung haben.

Beweis:

Es seien $\mathbb{E}_1: K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_m$ und $\mathbb{E}_2: L = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \dots \subseteq L_n$ freie Erweiterungsprozesse und es seien K_m und L_n isomorph. Es sind dann auch $\mathbb{I}(K_m)$ und $\mathbb{I}(L_n)$ isomorph. Nun lassen sich $\mathbb{E}_1$ und $\mathbb{I}$ sowie $\mathbb{E}_2$ und $\mathbb{I}$ zu freien Er-

weiterungsprozessen E'_1 und E'_2 zusammensetzen, so daß

$E'_1(K) = I(K_m)$ und $E'_2(L) = I(L_n)$ gilt. Daher sind

$I(K)$ und $I(L)$ isomorph.

Seien nun umgekehrt $I(K)$ und $I(L)$ isomorph. Genau genommen

liegen hier zwei verschiedene Erweiterungsprozesse vor,

die wir zur Unterscheidung mit I_1 und I_2 bezeichnen wollen.

Sei also ϕ eine Abbildung, die $I_1(K)$ isomorph auf $I_2(L)$

abbildet. Es gibt in $I_2(L)$ eine Teilstruktur M , in der L

und K , sowie mit jedem Element der I_2 -Stufe $m > 0$ dessen

I_2 -Träger und mit jedem ϕ -Bild eines Elementes der I_1 -Stufe

$m > 0$ dessen ϕ -Bilder der I_1 -Träger enthält. Also ist M

eine gemeinsame freie Erweiterung von L und K . Da außerdem

K und L endlich sind, ist auch M endlich.

Damit ist der Satz bewiesen.

Der folgende Satz ist eine einfache Folgerung aus Satz 4.2.

4.3 Satz:

Zwei endliche (m,n) -Inzidenzstrukturen sind genau dann J -äquivalent, wenn sie in endlich vielen Schritten durch Hinzufügen oder Weglassen einzelner freier Elemente auseinander hervorgehen.

4.4 Satz:

Zwei endliche affine ebene (m,n) -Inzidenzstrukturen J_1 und J_2 mit der Eigenschaft A5) sind genau dann J -äquivalent, wenn $r(J_1) = r(J_2)$ gilt.

Beweis:

Aus 3.5 und 4.2 folgt, daß $r(J_1) = r(J_2)$ gilt, wenn die Inzidenzstrukturen J_1 und J_2 zueinander J-äquivalent sind.

Um auch das Umgekehrte zu beweisen, zeigen wir, daß sich jede offene affine ebene (m,n) -Inzidenzstruktur J mit der Eigenschaft A5) durch Hinzurügen oder Weglassen freier Elemente in endlich vielen Schritten in eine Normalform folgender Art überführen läßt:

B besteht aus einer Geraden g , einem Punkt $P \in g$ und $q = r(J) - 4$ Punkten auf g oder für n bel., $m \geq 3$ bzw. m bel. $n \geq 3$ einer Geraden g , zwei Punkten P_1 und $P_2 \notin g$, und mindestens zwei Punkten Q_1 und $Q_2 \in g$, mit $P_1 \neq P_2$ und $Q_1 \neq Q_2$, die alle, bis auf Q_1 und Q_2 , zueinander verschieden parallel sind.

Wir wählen in J einen Punkt P und eine Gerade $g \ni P$, die zwei Punkte A, B enthält. Bezüglich des Paares g, P (und der Punkte A, B) definieren wir einige Verfahren zur Vereinfachung von J , bei denen der Rang von J unverändert bleibt.

1.) Ein freier Punkt Q (d.h. $r(Q) = 0$) mit $Q \neq P, A, B$ wird weggelassen.

2.) Eine freie Gerade h (d.h. $r(h) = 0$) mit $h \neq g$ wird weggelassen.

3.) Entfernen einer Geraden h mit $r(h) = 1$.

Wegen $r(g) < 0$ ist $h \neq g$. Es sind zwei Fälle möglich:

a) h enthält einen Punkt Q . Dann ist $[h]$ trivial.

Ist $Q \in g$, so fügen wir einen Schnittpunkt S von g und h

hinzu. Dann kann h weggelassen werden. Ist $Q \bar{\parallel} g$, und
 i) $m > 0$, so fügen wir eine Parallele h_1 zu h durch P
 hinzu, geben h_1 und g einen Schnittpunkt S_1 und lassen
 zuerst h und dann h_1 weg.

ii) $m = 0$, so füge man die Verbindungsgerade $PA = k$ hin-
 zu, schneide k mit h in Z , lasse h weg und bestimme den
 zu Z parallelen Punkt S von einer Parallelklasse v_n auf g ,
 lasse Z und dann k weg.

β) n enthält keinen Punkt. Dann gibt es eine Gerade $h_1 \neq h$
 mit $h_1 \parallel h$. Gilt $h \nparallel g$, so fügen wir, falls noch nicht vor-
 handen, eine Verbindungsgerade l von P und A hinzu, geben
 l und n einen Schnittpunkt S , lassen h weg, geben den
 Punkten S und B eine Verbindungsgerade l_1 , lassen S , und
 wenn l vorher nicht da war auch l weg und entfernen l_1
 wie im Falle α).

4.) Entfernen einer Geraden h mit $r(h) = 2$.

Man füge den Schnittpunkt Q_1 von g und h hinzu.

Ist $m > 0$, so kann man eine zu h parallele Gerade k durch P
 mit g schneiden und zuerst h , dann k weglassen.

Ist $m = 0$, so muß $n > 0$ sein. Wir schneiden die Gerade $k = PA$
 mit n in Z , fügen einen zu Z parallelen Punkt Z_1 auf g
 hinzu, lassen zuerst h , dann Z , dann k weg.

5.) Entfernen eines Punktes Q mit $r(Q) = 1$, $Q \bar{\parallel} g$ und $Q \neq P$.

Es sind zwei Fälle möglich:

α) Q inzidiert mit einer Geraden h . Dann ist $[Q]$ trivial.

Die Gerade durch Q kann nicht durch A und durch B gehen.

n verbinde Q mit A (oder B) durch eine Gerade h und lasse

Q weg. Danach entferne man h wie im Falle 3α).

β) Q inzidiert mit keiner Geraden. Dann gibt es einen Punkt $Q_1 \neq Q$ mit $Q_1 \parallel Q$. Q kann nur mit A oder B parallel sein. Gilt $Q \nparallel A$ oder B , so füge man die Verbindungsgerade h_1 durch die Punkte Q und A (bzw. B) hinzu und lasse Q weg. Danach entferne man h_1 wie in 3α).

6.) Entfernen eines Punktes Q mit $r(Q) = 2$ und $Q \neq P$.

Wir fügen Geraden h und h_1 durch Q und A bzw. Q und B hinzu und lassen Q weg. Dann entfernen wir h und h_1 wie im Fall 3α). Bei den Verfahren 1) bis 6) verrindert sich stets die Zahl der Geraden und die Zahl der Punkte Q mit $Q \nparallel g$. Wir nennen die affine ebene (m,n) -Inzidenzstruktur J bezüglich des Paares P, g (und der Punkte A, B) reduziert, wenn sich keines der Verfahren 1) bis 6) mehr anwenden läßt.

Gilt für den ausgezeichneten Punkt P bei einer reduzierten Inzidenzstruktur $r(P) < 0$ und hat J noch nicht die gewünschte Form, so gibt es einen Punkt $Q \neq P$ mit $Q \nparallel g$ und $r(Q) < 0$, denn J ist reduziert. Wir wählen Q, g als neues ausgezeichnetes Paar. Die reduzierte Struktur, die entsteht, hat nicht mehr Geraden als zuvor, aber die Zahl der Punkte außerhalb der ausgezeichneten Geraden hat sich vermindert. Wir gelangen also schließlich zu einer Struktur der gewünschten Form oder zu einer bezüglich Q, g reduzierten Struktur mit $r(Q) < 0$. Ist J bezüglich Q, g reduziert und gilt $r(Q) < 0$, so kommen als hyperfreie Elemente von J nur noch hyperfreie Punkte auf g in Frage, und frei können nur die Punkte A oder B sein.

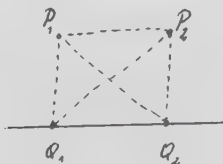
Entfernt man alle hyperfreien Punkte auf g , so muß wegen der Offenheit der Ausgangsstruktur $\mathcal{F}$ oder eine durch A oder B gehende andere Gerade hyperfrei werden.

a) Wir wählen, wenn möglich, eine andere nichthyperfreie Gerade $k \neq g$, einen nicht mit k inzidenten nichthyperfreien Punkt Q und wenden Verfahren 1) bis 6) an. Ist $k \perp A$ oder $k \perp B$, so wählen wir als ausgezeichnete Punkte auf k solche, die verschieden von A oder B sind. Es folgt nun, daß sich g oder eine durch A oder B gehende Gerade entfernen läßt, d.h. die Zahl der Geraden wird dadurch verringert.

b) Läßt sich keine solche nichthyperfreie Gerade k finden, so sind entweder Geraden k_A bzw. k_B durch A bzw. B nach Weglassen der evtl. freien Punkte A bzw. B frei oder A bzw. B sind zu Punkten A' bzw. B' parallel. Ist o.B.d.A. $k_B \setminus B$ frei, so kann zuerst B , dann k_B weggelassen werden.

Ist $A' \parallel A$, dann existiert ein Punkt $C \neq A$ mit $A' \parallel C$. Gilt $C \perp g$, so existiert mindestens ein Punkt C' mit $C' \parallel A' \parallel C \parallel A$. Gilt $C \not\perp g$, so ist $A' \parallel C \parallel A$ und es existiert ein Punkt $C' \neq C, A, A'$ mit $C' \parallel A \parallel A' \parallel C$.

Aus a) und b) folgt, daß man nach endlich vielen Schritten zu einer Inzidenzstruktur der gewünschten Form gelangt.



Teil II: Parallelprojektivitäten (affine Perspektivitäten) einer Geraden g einer freien affinen Ebene A auf sich

In diesem Teil werden Parallelprojektivitäten einer Geraden g einer freien affinen Ebene A auf sich betrachtet. Untersucht wird, ob die Standgruppe $S_n(g)$ auf n Punkten einer Geraden g einer freien affinen Ebene nur aus der Identität besteht, oder ob es von der Identität verschiedene Parallelprojektivitäten gibt, die der Standgruppe angehören. Insbesondere soll die Zahl n_0 bestimmt werden, für die die Standgruppe $S_{n_0}(g)$ und die Standgruppen $S_m(g)$ für $m \geq n_0$ allein aus der Identität bestehen, und für die die Standgruppen $S_m(g)$ für $m < n_0$ außer der Identität noch andere Elemente besitzen. Mit anderen Worten: Ab welcher Anzahl n von Punkten $A_1, \dots, A_n$ muß eine Parallelprojektivität einer Geraden g einer freien affinen Ebene auf sich, die diese n Punkte festlt, die Identität sein? Für kleinere n wird gezeigt, daß es Standgruppen für bestimmte n Punkte gibt, die außer der Identität noch andere Parallelprojektivitäten enthalten.

Kap. 5: Vorbereitungen und Definitionen

5.1 Definition:

Eine affine, ebene (m, n) -Geometrie heißt affine Ebene, wenn keine Punktparallelitäten existieren, d.h. wenn $n = 0$ ist und es nur eine nichttriviale Äquivalenzrelation auf der Geradenmenge gibt, d.h. wenn $m = 1$ ist.

wenn in einer affinen ebenen (m,n) -Inzidenzstruktur $n = 0$ und $m = 1$ gilt, sprechen wir von einer affinen ebenen Inzidenzstruktur.

5.2 Definition:

Für Punkte und Geraden einer affinen ebenen Inzidenzstruktur $\mathcal{A}$ definieren wir folgendes:

1. Ein Punkt P heißt (affin) hyperfrei in $\mathcal{A}$, wenn durch P keine drei verschiedenen Geraden aus $\mathcal{A}$ gehen.
2. Ein Punkt P heißt (affin) frei in $\mathcal{A}$, wenn durch P genau zwei Geraden von $\mathcal{A}$ gehen.
3. Eine Gerade g heißt (affin) hyperfrei in $\mathcal{A}$, wenn g in keiner Teilinzidenzstruktur $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$ folgenden Typs vorkommt:
 - a) $\mathcal{B}$ besteht aus g und drei verschiedenen Punkten $A, B, C \perp g$;
 - b) $\mathcal{B}$ besteht aus g , zwei verschiedenen Punkten $A, B \perp g$ und einer Geraden h mit $h \parallel g$.
4. Eine Gerade g heißt (affin) frei in $\mathcal{A}$, wenn entweder auf g genau zwei verschiedene Punkte aus $\mathcal{A}$ liegen, oder g genau einen Punkt, aber die Schar $[g]$ mindestens zwei verschiedene Geraden enthält.

5.3 Definition:

In 1.6, 1.7 und 1.8 wurden die Begriffe Teilinzidenzstruktur, Erweiterungsprozess $\mathcal{E}$ und Stufe $s(x)$ eines Elements x allgemein definiert, d.h. die Definitionen werden auch für den affinen Fall übernommen.

5.4 Hilfssatz:

In einer freien affinen Ebene $\mathbb{I}(A_0)$ gilt:

1. Der Erweiterungsprozeß $\mathbb{I}$ hat nur drei Rekursionsschritte:

$$J_{3r} \longrightarrow J_{3r+1}, \quad J_{3r+1} \longrightarrow J_{3r+2}, \quad J_{3r+2} \longrightarrow J_{3r+3}.$$

2. Eine Gerade der Stufe $k = 3r+1 > 0$ enthält genau zwei Punkte kleinerer Stufe als k , von denen einer der Punkte die Stufe $k-1$ hat.

3. Eine Gerade der Stufe $k = 3r+2 > 0$ enthält entweder genau einen Punkt der Stufe $k-2 = 3r$ und ist parallel zu einer Geraden einer Stufe $k-1 = 3r+1$,

oder enthält genau einen Punkt einer Stufe $k-2 = 3r$ und ist parallel zu einer Geraden der Stufe $k-1$.

4. Ein Punkt der Stufe $k = 3r$ inzidiert mit genau zwei Geraden kleinerer Stufe, wobei eine von ihnen die Stufe $k-1$ bzw. $k-2$ hat.

Beweis: Siehe hierzu 2.7 Definition des natürlichen Erweiterungsprozesses.

Wir werden den natürlichen freien Erweiterungsprozeß mit $\mathbb{I}(A)$ bezeichnen.

5.5 Satz:

Hat die affine Ebene Inzidenzstruktur A die Eigenschaft A 5) (siehe Definition 1.1), so ist $\mathbb{I}(A)$ offensichtlich eine affine Ebene.

Beweis: Vgl. hierzu Beweis zu Satz 2.9.

5.6 Bemerkung:

Sämtliche Definitionen über offene bzw. geschlossene Konfigurationen, den Rang einer endlichen affinen ebenen Inzidenzstruktur usw. können aus Teil I übertragen werden. Eine ausführliche Betrachtung mit Beweisen findet man auch bei Schleiermacher/Strambach **6** .

Kap. 6: Parallelprojektivitäten einer Geraden g einer freien affinen Ebene A auf sich

Im folgenden wenden wir uns den Parallelprojektivitäten einer Geraden g einer freien affinen Ebene auf eine Gerade h dieser Ebene zu. Insbesondere betrachten wir die Parallelprojektivitäten einer Geraden g einer freien affinen Ebene auf sich.

6.1' Definition:

1. Die bijektive Abbildung α , die jedem Punkt P einer Geraden g einer freien affinen Ebene eine Gerade h der Parallelenschar $[h]$ mit $g \cap h = P$ und $g \notin [h]$ zuordnet,

heißt affine Perspektivität $\alpha = [g, [h]]$.

2. Die bijektive Abbildung α' , die jeder Geraden h der Parallelenschar $[h]$ den Punkt $P = g \cap h$ zuordnet mit $g \notin [h]$,

heißt affine Perspektivität der Parallelenschar $[h]$ auf die Punkte der Geraden g, in Zeichen $\alpha' = [[h], g]$.

3. Die Hintereinanderausführung zweier Perspektivitäten $\alpha = [g, [h]]$ und $\alpha' = [[h], k]$, die die Punkte einer Geraden g auf die Punkte einer Geraden k dieser Ebene abbildet, heißt

Parallelprojektivität π der Geraden g auf die Gerade k.

In Zeichen: $\pi = [g, [h]][[h], k] = [g, [h], k]$

wobei $g, k \notin [h]$

6.2 Bemerkung:

Zu jeder Perspektivität α existiert eine Inverse α^{-1} , so daß ihr Produkt $\alpha \circ \alpha^{-1}$ die Identität ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} [g, [h]] [[h], g] &= \text{Id. und} \\ [h, [g]] [[g], h] &= \text{Id.} \end{aligned}$$

6.3 Definition:

Das Produkt von Parallelprojektivitäten $\prod_i$ einer Geraden g_{i-1} auf eine Gerade g_i einer freien affinen Ebene heißt

Parallelprojektivität ω einer Geraden g_0 auf eine Gerade g_n .

$$\omega = [g_0, [h_1]] g_1 [g_1, [h_2]] g_2 \dots [g_{n-1}, [h_n]] g_n$$

$$\omega = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_n$$

$$n \geq 2$$

6.4 Bemerkung:

Die Parallelprojektivitäten einer Geraden g auf sich bilden eine Gruppe $\Pi(g)$.

Beweis:

Man betrachte die Projektivitäten der Gestalt

$$\{ [g, [h]] [[h], g] \dots [g_{n-1}, [h_n]] [[h_n], g] \sim \emptyset \}$$

mit dem Produkt durch Hintereinanderschalten.

Die zu $[g_i, [h_{i+1}]]$ inverse Perspektivität sei $[[h_{i+1}], g_i]$.

$\Pi(g)$ ist also eine Gruppe mit $\emptyset$ als Identität.

6.5 Bemerkung:

Seien g und h verschiedene Geraden einer freien affinen Ebene A , dann sind $\Pi(g)$ und $\Pi(h)$ als Permutationsgruppen isomorph.

Beweis:

Es sei $w \in \Pi(g)$ und α eine Perspektivität der Geraden g auf die Gerade h . Wir definieren die Abbildung $\sim : \Pi(g) \rightarrow \Pi(h)$ mit $w \rightarrow \alpha^{-1} w \alpha$. Die Abbildung $\sim$ ist ein Isomorphismus, denn

" $\sim$ " ist injektiv: Sei $\alpha^{-1} w \alpha = \alpha^{-1} w' \alpha$ so ist

$$\alpha \alpha^{-1} w \alpha \alpha^{-1} = \alpha \alpha^{-1} w' \alpha \alpha^{-1} \quad \text{also ist} \quad w = w'$$

" $\sim$ " ist surjektiv: Sei $w' := \alpha^{-1} w \alpha \in \Pi(h)$

$\alpha w' \alpha^{-1}$ ist Urbild von $\alpha^{-1} w \alpha$, denn $\alpha \alpha^{-1} w \alpha \alpha^{-1} = w$

$$(\alpha w' \alpha^{-1}) = \alpha^{-1} w \alpha = \alpha^{-1} w \alpha \alpha^{-1} w' \alpha = \tilde{w} \circ \tilde{w}'$$

6.6 Definition:

Eine Projektivität einer Geraden g einer freien affinen Ebene A auf eine Gerade h dieser Ebene ist reduziert (gekürzt) dargestellt, wenn $g_i \neq g_{i+1}$ und $[h_i] \neq [h_{i+1}]$ ist.

6.7 Definition:

Sei $[h]$ eine Parallelenschar in einer freien affinen Ebene A ; dann gibt es genau eine Gerade von kleinster Stufe. Sie heißt die Erzeugende der Parallelenschar.

6.8 Definition:

Es sei w eine Parallelprojektivität einer Geraden g einer freien affinen Ebene A auf sich mit der gekürzten

Darstellung

$$(*) \quad \omega = \prod_{k=0}^{n-1} [g_k [h_{k+1}] g_{k+1}] \quad (k \geq 0) \text{ mit } g = g_0 = g_n.$$

Die Geraden g_i und die Geraden h_i , wobei h_i die Erzeugenden der Parallelenscharen $[h_i]$ sind, heißen erzeugende Elemente von ω bezüglich der Darstellung $(*)$.

6.9 Definition:

Es sei ω eine Parallelprojektivität einer freien affinen Ebene auf sich mit der gekürzten Darstellung

$$\omega = \prod_{k=0}^{n-1} [g_k [h_{k+1}] g_{k+1}] \quad \text{mit } g_0 = g = g_n.$$

Unter der zur Projektivität ω und der Punktmenge $\mathcal{P} = \{P_r\} \subset g$ gehörenden Konfiguration Ω_n versteht man die Menge folgender Punkte und Geraden einer Ebene:

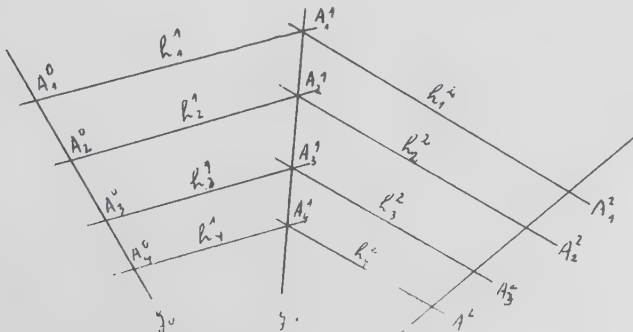
(i) Die Erzeugenden von ω

(ii) Die Punkte P_r^k ($k=0, \dots, n$) mit $P_r^0 = P_r$ und $g_0 = g = g_n$. P_r^k ist für $k > 0$ der Schnittpunkt der Geraden g_k mit der Geraden h_r^{k+1} , wobei h_r^{k+1} die Gerade ist, für die gilt: $h_r^{k+1} \in [h_{k+1}]$ mit $P_r^{k-1} \in h_r^k$.

(iii) Die Geraden $h_r^k \in [h^k]$ mit $P_r^{k-1} \in h_r^k$.

6.10 Bemerkung:

Ist $\mathcal{P} = \{P_r\}$ endlich, so ist die Anzahl der Elemente der zu ω und $\{P_r\}$ gehörenden Konfiguration Ω endlich.



6.11 Satz:

In einer freien affinen Ebene A sei ω eine affine Projektivität einer Geraden g auf sich.

Ist $\omega = \prod_{i=1}^n [g_{i-1} [h_i] g_i]$ mit $g_0 = g = g_n$ $n \geq 2$ reduziert dargestellt, so ist ω nicht die Identität.

Beweis:

Es wird gezeigt, daß ein Punkt A existiert, so daß $\omega(A)$ größere Stufe hat als A .

Mit z werde die maximale Stufe unter den Erzeugenden von ω bezeichnet (dabei ist die Stufe von $[h_i]$ die Stufe der Erzeugenden von $[h_i]$).

Es seien X und Y verschiedene Punkte mit $X, Y \notin g_0$ und $\max \{s(X), s(Y)\} := k > z+2$ sowie $l := (XY) \notin [h_1]$.

Diese Situation existiert, denn es gibt außerhalb von g_0 Elemente beliebig großer Stufe.

Es ist $s(l) = k+1$ und für $A := l \cap g_0$ dann $s(A) = k+3 := \alpha_0$; weiterhin ist $s(h_1^A) = \alpha_0 + 2$ und für $A_1 := h_1^A \cap g_1$ dann $s(A_1) = \alpha_0 + 3 := \alpha_1$.

Es gilt $A \neq g_0 \cap g_1 \neq A_1$, da sonst $s(A) \leq z+2$ bzw. $s(A_1) \leq z+2$, wenn $\max \{s(g_0), s(g_1)\} \leq z$.

Behauptung: Für alle i gilt: $\alpha_i := \alpha_{i-1} + 3$.

Für $i = 1$ ist die Behauptung richtig.

Angenommen die Behauptung sei für ein j mit $1 \leq j \leq n$ verletzt.

Fall 1): Gilt $A_{j-1} = A_j = g_{j-1} \cap g_j$, so ist $s(A_{j-1}) = s(A_j) \leq z+2$, aber $s(A_{j-1}) = s(A_{j-2}) + 3 > \alpha > z + 3$.

Fall ii) Gilt $A_{j-1} \neq A_j$ und $s(A_{j-1}) = \alpha_{j-1} = \alpha_{j-2} + 2$.

Behauptung (*) $s(h_j^A) = \alpha_{j-1} + 2$

Annahme (*) ist falsch, d.h. es gilt $s(h_j^A) \leq \alpha_{j-1} + 1$

und es gelte auch nicht: $s(h_j^A) \leq \alpha_{j-1} - 1$,

dann ist aber $s(g_j^A) = \alpha_{j-1} + 1$, was wegen $g_j^A \in [h_j]$ nicht sein kann. Deshalb müßte $s(h_j^A) \leq \alpha_{j-1} - 1$ sein.

Dann gehen aber durch A_{j-1} drei verschiedene Geraden kleinerer Stufe, nämlich h_j^A , g_{j-1} , h_{j-1}^A , was einen Widerspruch ergibt.

6.12 Korollar:

Jede affine Projektivität aus der Gruppe $\overline{\Pi}(g)$

der affinen Projektivitäten einer freien affinen Ebene besitzt genau eine reduzierte (gekürzte) Darstellung.

Beweis:

Es seien $\omega_1 = \prod_{i=1}^m [g_{i-1} [h_i] g_i]$

$$\omega_2 = \prod_{i=1}^m [g'_{i-1} [h'_i] g'_i]$$

gekürzte Darstellungen mit $g = g_0 = g'_0 = g_n = g'_m$

$$\omega_1 \omega_2^{-1} = [g [h_1] g_1] \cdots [g_{n-1} [h_n] g_n] [g [h'_m] g'_{m-1}] \\ [g'_{m-1} [h'_{m-1}] g'_{m-2}] \cdots [g'_1 [h'_1] g] = \text{Id.}$$

d.h. alle Perspektivitäten müssen sich wegekürzen und

damit ist $\omega_1 = \omega_2$

6.13 Hauptsatz:

Die einzige affine Projektivität (Parallelprojektivität) ω einer Geraden g einer freien affinen Ebene A auf sich, die vier verschiedene Punkte (einzeln) restläßt, ist die Identität.

Beweis:

Es sei $\omega = \prod_{i=1}^n [g_{i-1} [h_i] g_i]$ mit $g_0 = g = g_n$ $n \geq 2$ reduziert dargestellt und ω lasse vier verschiedene Punkte $\{P_r\}_{r=1,2,3,4}$ fest.

Sei Ω die zu $\{P_r\}$ und ω gehörige Konfiguration. Ω ist eine offene Konfiguration.

Dann ist auch Ω' eine offene Konfiguration, wenn Ω' aus Ω durch Weglassen aller hyperfreien Geraden entsteht.

Dann ist auch Ω'' eine offene Konfiguration, wenn Ω'' aus Ω' durch Weglassen aller hyperfreien Punkte entsteht.

($\Omega^3 \dots$ Weglassen der Geraden $\dots$ usw.)

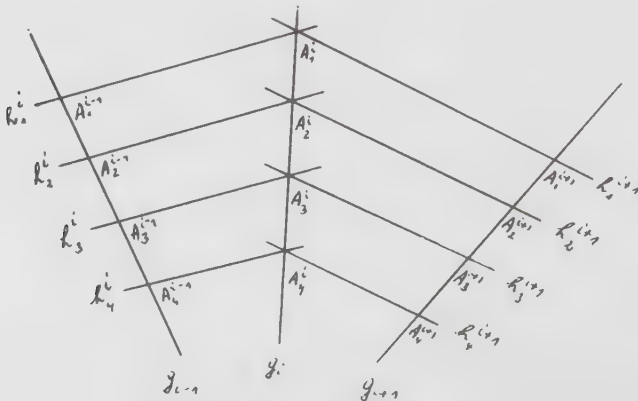
Wegen der Offenheit müßte es also ein n geben mit $\Omega^n = \emptyset$.

Wir untersuchen beim "Abbau" folgende Fälle:

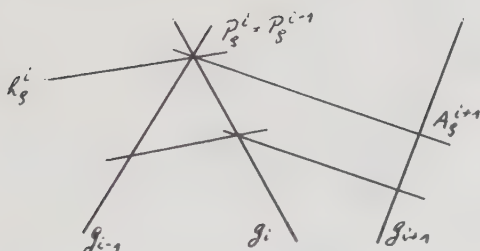
(i) $g_{i-1} \cap g_i \neq P_r^i$ und $g_i \cap g_{i+1} \neq P_r^i$.

Somit sind alle P_r^i und g_{i-1} , g_i , g_{i+1} nicht hyperfrei.

Ebenso sind alle h_r^i , h_r^{i+1} nicht hyperfrei.



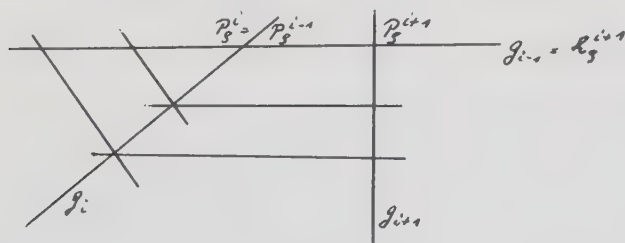
(ii) Es sei $g_{i-1} \cap g_i = P_g^i = P_g^{i-1}$ und $g_i \cap g_{i+1} \neq P_r^i$.



Die Gerade h_g^i ist in Ω hyperfrei und damit ist $\Omega' \neq \Omega$.

Damit $\Omega' \neq \Omega$ ist, muß gelten $h_g^{i+1} = g_{i-1}$,

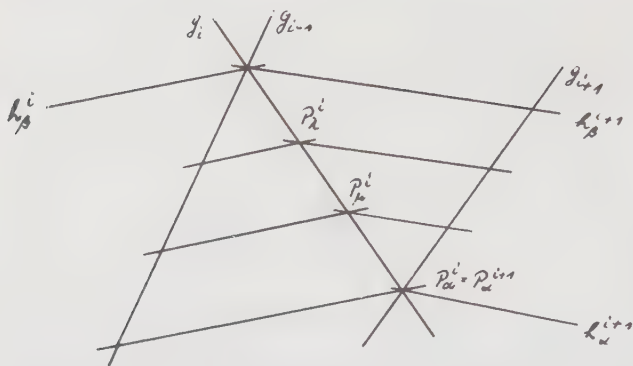
denn dann ist P_g^i ein hyperfreier Punkt in Ω' .



Die Punkte P_r^i für $r \neq g$ bleiben in Ω' nicht hyperfrei, also bleibt beim Übergang von Ω^2 nach Ω^3 die Gerade g_i nicht hyperfrei (g_i kann nicht weggelassen werden).

Der Fall: $g_i \cap g_{i+1} = P_g^i = P_g^{i+1}$ und $g_i \cap g_{i-1} \neq P_r^i$ ist äquivalent zu den eben behandelten.

(iii) Sei $g_{i-1} \cap \sigma_i = \Gamma_\beta^{i-1} = P_\beta^{i-1}$ und $g_i \cap \sigma_{i+1} = \Gamma_\alpha^i = P_\alpha^{i+1}$.



h_β^i und h_α^{i+1} sind in Ω hyperfrei. Damit P_β^i und P_α^i hyperfrei in Ω' sind, muß gelten $g_{i-1} = h_\beta^{i+1}$ und $h_\alpha^i = g_{i+1}$.

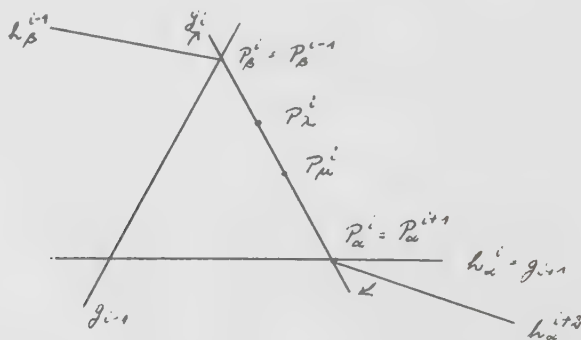
Weiternin muß, falls P_α^i und P_β^i hyperfrei in Ω' sein sollen, folgendes zutreffen:

(a) $h_\alpha^{i+2} = g_i$ oder (b) $g_{i+2} = g_i$ und

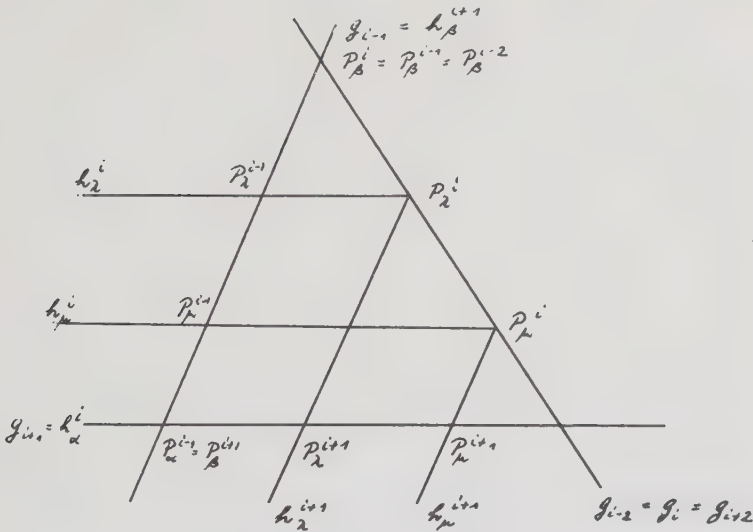
(a') $h_\beta^{i-1} = g_i$ oder (b') $g_{i-2} = g_i$

(beachte: Es gilt immer $h_\beta^{i-1} \neq g_{i-1}$ und $h_\alpha^{i+2} \neq g_{i+2}$).

Gilt (a), so kann g_i nicht hyperfrei werden, denn ihre Parallelenschar ($g_i \in [h_{i+2}]$) ist nicht trivial und sie trägt mindestens zwei nichthyperfreie Punkte in Ω' , nämlich P_λ^i, P_μ^i (Gilt (a'): analog)



Damit g_i hyperfrei wird, muß also (b), (b') gelten:



Wir betrachten die Punkte $P_{\lambda}^i, P_{\mu}^i, P_{\lambda}^{i+2}, P_{\mu}^{i+2}, P_{\lambda}^{i-2}, P_{\mu}^{i-2}$, die alle auf g_i liegen. (Insbesondere liegen auf g_i auch alle Punkte $P_{\lambda, \mu}^{i+2k}$, da auch gilt: $g_i = g_{i+2k}$ mit $k \in \mathbb{N}$.)

P_{λ}^i, P_{μ}^i sind in Ω' nicht hyperfrei. Damit g_i hyperfrei wird, müssen $P_{\lambda}^{i+2}, P_{\mu}^{i+2}, P_{\lambda}^{i-2}, P_{\mu}^{i-2}$ hyperfrei sein, d.h. in Ω' dürfen durch diese Punkte nur zwei verschiedene Geraden gehen.

$P_{\lambda}^{i+2}, P_{\mu}^{i+2}$ müssen ungleich $P_{\beta}^i, P_{\alpha}^i$ sein, denn sonst wären P_{β}^i und P_{α}^i nicht hyperfrei in Ω' .

Sind die Punkte $P_{\lambda}^{i+2}, P_{\mu}^{i+2}$ verschieden von P_{λ}^i, P_{μ}^i , so würden durch jeden der $P_{\lambda}^{i+2}, P_{\mu}^{i+2}$ drei verschiedene Geraden gehen, die in Ω nicht hyperfrei sind; nämlich:

$$g_i = g_{i+2}, h_{\lambda, \mu}^{i+2}, h_{\lambda, \mu}^{i+3} \quad \text{für } P_{\lambda, \mu}^{i+2}$$

$$g_i = g_{i-2}, h_{\lambda, \mu}^{i-2}, h_{\lambda, \mu}^{i-1} \quad \text{für } P_{\lambda, \mu}^{i-2}$$

Sei nun $P_{\mu}^{i-2} = P_{\lambda}^i = P_{\mu}^{i+2}$, und $P_{\lambda}^{i-2} = P_{\mu}^i = P_{\lambda}^{i+2}$, so wäre zwar g_i hyperfrei in Ω^2 , aber weder P_{λ}^i noch P_{μ}^i

könnten jemals hyperfrei werden, denn durch sie gingen mindestens jeweils vier verschiedene Geraden, die ebenfalls nicht hyperfrei sind; nämlich:

$$h_{\mu}^{i-1}, h_{\lambda}^{i+2}, h_{\lambda}^i, h_{\lambda}^{i+1} \quad \text{für } P_{\mu}^{i-2} = P_{\lambda}^i = P_{\mu}^{i+2}$$

$$h_{\lambda}^{i-1}, h_{\lambda}^{i+2}, h_{\mu}^i, h_{\mu}^{i+1} \quad \text{für } P_{\lambda}^{i-2} = P_{\mu}^i = P_{\lambda}^{i+2}$$

Ist $P_{\lambda}^{i-2} = P_{\lambda}^i$ und $P_{\mu}^{i-2} = P_{\mu}^i$, so ist $[h_{i-1}] = [h_i]$ und

$$[g_{i-2}, [h_{i-1}], g_{i-1}] [g_{i-2}, [h_i], g_i] = \text{Id.}$$

Ist $P_{\lambda}^{i+2} = P_{\lambda}^i$ und $P_{\mu}^{i+2} = P_{\mu}^i$, so ist $[h_{i+1}] = [h_{i+2}]$ und

$$[g_i, [h_{i+1}], g_{i+2}] [g_{i+1}, [h_{i+2}], g_{i+2}] = \text{Id.}$$

ω hat aber eine reduzierte Darstellung.

Somit ist ω die Identität.

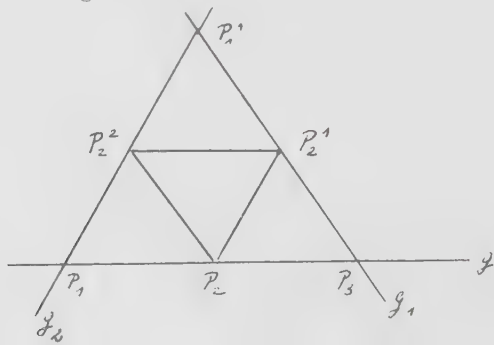
6.14 Satz:

Es sei $\mathbb{A}$ eine freie affine Ebene und Π die Gruppe der affinen Projektivitäten einer Geraden g auf sich.

Dann existieren drei Punkte P_1, P_2, P_3 (wobei zwei von ihnen frei wählbar aber verschieden sind), so daß

$$\Pi P_1, P_2, P_3 \neq \text{Id.}$$

Beweis: (Durch Angabe eines Beispiels)



es sei $\pi = [g, [g_2], g_1][g_1, [g], g_2][g_2, [g_1], g]$

(i) π^2 ist Projektivität von g auf sich und reduziert dargestellt.

(ii) π^2 hat drei verschiedene Fixpunkte, nämlich P_1, P_2, P_3 .

$$\begin{array}{ccccccc} \pi: & P_1 & \longrightarrow & P_1^1 & \longrightarrow & P_1^1 & \longrightarrow & P_3 \\ & P_2 & \longrightarrow & P_2^1 & \longrightarrow & P_2^2 & \longrightarrow & P_2 \\ & P_3 & \longrightarrow & P_3 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_1 \end{array}$$

(iii) Zu zeigen: Die Konfiguration enthält keine geschlossene Teilkonfiguration:

1. Wegnahme aller hyperfreien Punkte; das sind P_1, P_3, P_1^1 .

2. Wegnahme aller hyperfreien Geraden; das sind g, g_1, g_2 .

usw.

Ergebnis: "nichts", d.h. keine geschlossene Teilkonfiguration

bleibt übrig. Somit ist: $\text{Id.} \neq \pi^2 \in \pi_{P_1, P_2, P_3}$.

6.15 Satz:

Ist g eine Gerade und $\pi(g)$ die Gruppe der Projektivitäten einer freien affinen Ebene. Dann ist $\pi(g)$ eine freie Gruppe des Ranges $\aleph_0$ (d.h. $\pi(g)$ hat unendlich abzählbar viele Erzeuger).

Beweis:

Man betrachte die freie Gruppe F mit dem Erzeugendensystem

$$\mathcal{X} := \{s_i = [g, [h]]\}, \quad \mathcal{X}^{-1} := \{s_i^{-1} = [[h], g]\}$$

$$F := \langle \mathcal{X} \cup \mathcal{X}^{-1} \rangle$$

Die Untermenge von Projektivitäten der Gestalt

$$[k, [n_1]] [[n_1], g_1] \dots [[g_{n-1}, [n_n]] [[n_n], k]$$

ist eine Untergruppe von F . Sie hat den Rang α_0 , denn es gibt unendlich abzählbar viele Geraden g_i und Parallelen-scharen $[h_i]$.

6.16 Folgerung:

Der Stabilisator $\sum_i$ auf $i = 1, 2$ beliebigen ver-schiedenen und auf gewissen drei verschiedenen Punkten in einer freien affinen Ebene ist eine freie Gruppe des Ranges α_0 .

Beweis:

Man betrachte die Skizze auf Seite 54.

$$\text{Sei } \pi = [g, [h_2]][[h_2], g_1][g_1, [h]][[h], g_2][g_2, [h_1]][[h_1], g]$$

$$\pi^i \in \sum_3 \text{ und } \pi^i \in \sum_4$$

Da P_2^2 frei wählbar ist, hat $\sum_2$ den Rang α_0 .

Beachte: Durch die Wahl von P_1, P_2 ist P_3 eindeutig bestimmt.

Für verschiedene Geraden g und h einer beliebigen affinen Ebene, also insbesondere einer freien, sind die Gruppen $\pi(g)$ und $\pi(1)$ isomorph (vgl. dazu auch Barlotti 1).

Wir beschäftigen uns nun mit solchen Isomorphismen zwischen ihnen, die längentreu sind.

6.17 Definition:

Die Länge einer Projektivität π ist die Zahl $l(\pi) = 2n$, wenn durch das Produkt $\pi = [g_0, [h_1]][[h_1], g_1] \dots [g_{n-1}, [h_n]][[h_n], g_n]$ reduziert dargestellt ist.

6.18 Definition:

Eine affine Kette ist eine Folge

$$(r_0 [g_1])([g_1] r_1)([g_2] r_2) \dots (r_{n-1} [g_n])([g_n] r_n) \quad (*)$$

von Symbolen $(r_i [g_{i+1}])$ bzw. $([g_i] r_i)$, wobei die r_i Geraden und die $[g_i]$ Parallelenscharen freier affiner Ebenen sind mit $r_i \notin [g_i]$. Eine affine Kette heißt gekürzt, wenn $[g_i] \neq [g_{i+1}]$ und $r_i \neq r_{i+1}$ gilt.

6.19 Bemerkung:

Jedem Symbol $(r_i [g_{i+1}])$ einer affinen Kette in gekrztter Darstellung kann man eine Perspektivität $[r_i [g_{i+1}]]$ der Punkte einer Geraden r_i auf eine Parallelenschar $[g_{i+1}]$ zuordnen. Ganz analog kann man dem Symbol $([g] r)$ die Perspektivität $[[g] r]$ zuordnen. Somit entspricht eine affine Kette in gekrztter Darstellung einer Parallelprojektivität Π der Geraden r_0 auf die Gerade r_n (oder umgekehrt). Die Ketten der Form $(*)$ mit $r_0 = r_n = r$ bilden eine Gruppe $\mathcal{V}(g)$.

6.20 Bemerkung:

Ist α ein Automorphismus der freien affinen Ebene A , so induziert er einen lngentreuen Isomorphismus

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} : \Pi &= [g_0, [h_1]] [[h_1], g_1] \dots [[h_n], g_n] \\ \longrightarrow \Pi^{\alpha} &= [g_0^{\alpha}, [h_1^{\alpha}]] [[h_1^{\alpha}], g_1^{\alpha}] \dots [[h_n^{\alpha}], g_n^{\alpha}] \end{aligned}$$

von $\Pi(g_0)$ auf $\Pi(g^{\alpha})$.

(Der entsprechende von α induzierte Isomorphismus von $\mathcal{V}(g)$ auf $\mathcal{V}(g^{\alpha})$ sei mit $\hat{\alpha}$ bezeichnet).

Diese Behauptung läßt sich umkehren.

6.21 Satz:

Ist $\bar{\alpha}$ ein längentreuer Isomorphismus der Gruppe $\Pi(g)$ auf die Gruppe $\Pi(1)$, so gibt es genau einen Automorphismus der nichtgeschlossenen Ebene A , der $\bar{\alpha}$ induziert.

Zum Beweis des Satzes wird folgendes Lemma benötigt:

6.22 Lemma:

Ist $\hat{\alpha}$ ein längentreuer Isomorphismus der Kettengruppe $\Psi(r)$ auf die Kettengruppe $\Psi(s)$, so gibt es genau einen Automorphismus α der Ebene A , der $\hat{\alpha}$ induziert.

Beweis:

Wir definieren den Automorphismus α von A , der den Isomorphismus $\hat{\alpha}$ induziert und zeigen, daß α auf Parallelbüscheln, Projektionsgeraden und Punkten eindeutig ist;

es sei

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} : g &= (r[g])([g]v)(v[h])([h]r) \\ &\longrightarrow g' = (s[g_1])([g_1]v_1)(v_1[h_1])([h_1]s) \end{aligned}$$

ein längentreuer Isomorphismus mit den reduzierten Ketten g und g' . Es genügt, α für die von r verschiedenen Geraden zu definieren. Wir setzen

$$\alpha[g] = [g_1]$$

$$\alpha[v] = v_1$$

$$\alpha[h] = [h_1]$$

α ist wohldefiniert und eindeutig auf den Parallelenscharen, denn ist $g_1 = (r[g])([g]v)(v[h])([h]r)$

$$\text{und } g_2 = (r[k])([k]w)(w[l])([l]r)$$

in gekürzter Darstellung, so hat

$$g_1^{-1} g_2 = (r[n])([h]v)(v[g])([g]r)(r[k])([k]w)(w[l])([l]r)$$

für $[g] = [k]$ eine Länge ≤ 6 ,

dies ist genau dann der Fall, wenn

$$(g_1^{-1})^{\alpha} \delta^{\alpha} = (s[h_1])([h_1]v_1)(v_1[g_1])([g_1]s)(s[k_1])([k_1]w_1) \\ (w_1[l_1])([l_1]s)$$

die Länge ≤ 6 hat, wenn also $[g_1] = [k_1]$ gilt.

α ist wohldefiniert und eindeutig auf den Projektionsgeraden;

d.h. zwei Geraden v und w haben genau dann dasselbe Bild

unter α , wenn $v_1 = w_1$ gilt:

Fall 1) Es sei $[g] \neq [k]$ und $[h] \neq [l]$

$$\text{für } \vartheta = (r[g])([g]v)(v[h])([h]r)$$

$$\delta = (r[k])([k]w)(w[l])([l]r)$$

und $\mathcal{R} = (r[h])([h]v)(v[k])([k]r)$ in reduzierter Darstellung;

gilt $v = w$, so ist $\mathcal{R} \neq \vartheta^{-1}, \delta^{-1}$ und das Produkt

$$\vartheta \mathcal{R} \delta = (r[g])([g]v)(v[h])([h]r)(r[k])([k]v)(v[k]) \\ ([k]r)(r[k])([k]w)(w[l])([l]r)$$

hat eine Länge ≤ 4 ,

dies ist genau dann der Fall, wenn $(\vartheta \mathcal{R} \delta)^2$

eine Länge ≤ 4 hat, wenn also $v_1 = w_1$ gilt.

Ist umgekehrt $\mathcal{R}_1 = (s[t_1])([t_1]z)(r[t_2])([t_2]s)$

ein Element $\neq \vartheta^{-1}, \neq \delta^{-1}$ der Länge ≤ 4 , so daß

$$\vartheta^2 \mathcal{R}_1 \delta^2 = (s[g_1])([g_1]v_1)(v_1[h_1])([h_1]s)(s[t_1])([t_1]z) \\ (z[t_2])([t_2]s)(s[k_1])([k_1]w)(w[l_1])([l_1]s)$$

eine Länge ≤ 4 hat, und sei $[t_1] \neq [t_2]$, dann folgt

$[t_1] = [h_1]$ und $[t_2] = [k_1]$, d.h.

$$\hat{\rho}^{\hat{\alpha}} \hat{\rho}^{\hat{\alpha}} = (s [g_1]) ([g_1] v_1) (v_1 [h_1]) ([h_1] z) (z [k_1]) ([k_1] w) (w [l_1]) ([l_1] s).$$

Soll dieses Produkt eine Länge ≤ 4 haben, so muß $v_1 = z$ und $z = w_1$ sein.

Fall 2)

In $\mathcal{g}$ und $\mathcal{d}$ gelte: $[g] = [k]$ bzw. $[h] = [l]$.

Genau dann haben v und w dasselbe Bild unter α , wenn $v = w$ ist:

Ist nämlich $[g] = [k]$, so hat

$$\hat{\rho}' \hat{\rho}' = (r [h]) ([h] v) (v [g]) ([g] r) (r [k]) ([k] w) (w [l]) ([l] r)$$

eine Länge ≤ 4 und somit auch $(\hat{\rho}' \hat{\rho}')^{\hat{\alpha}}$ genau dann, wenn $v_1 = w_1$ folgt.

Ist $[h] = [l]$ so hat $\hat{\rho}' \hat{\rho}'$ die Länge ≤ 4 genau dann, wenn $v_1 = w_1$ ist.

Da α eine Umkehrabbildung hat, ist der Beweis des Lemmas beendet.

Da die Darstellung einer affinen Perspektivität durch reduzierte Ketten eindeutig ist, folgt Satz 6.21 aus Lemma 6.22 unmittelbar.

6.23 Satz:

Eine Kollineation der affinen Ebene A kann keine Projektivität einer Geraden g auf eine Gerade h induzieren, die eine nichttriviale Darstellung hat.

Beweis:

Die projektive Abschließung von A ist eine projektive Ebene $\bar{A}$ und jede affine Projektivität läßt sich als eine Projektivität der freien projektiven Ebene auffassen; sie setzt sich aus Perspektivitäten zusammen, deren Zentren auf der uneigentlichen Geraden liegen.

Da auch jede Kollineation der affinen Ebene zu einer Kollineation der projektiven Abschließung fortsetzbar ist, folgt die Behauptung nach Schleiermacher/Strambach 7 Satz 5 .

LITERATURVERZEICHNIS

1 Barlotti, A.:

La determinazione del gruppo delle proiettività
di una retta in sé in alcuni particolari piani
grafici finiti non desarguesiani.

Bollettino Un. Mat. Ital., III. Ser. 14, 543 - 547 (1959).

2 Dembowski, Peter:

Finite Geometries, Springer-Verlag, 1968.

3 Hughes/Piper:

Projektive Planes, Springer-Verlag.

4 Pickert, G.:

Projektive Ebenen. Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1955.

5 Schleiermacher, A.:

Bemerkungen zum Fundamentalsatz der projektiven Geometrie
Math.Z. 99, S. 299-304.

6 Schleiermacher, A. und Strambach, K.:

Freie Erweiterung in der affinen Geometrie und in
der Geometrie der Kreise I.

Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 34, 22-37.

7 Schleiermacher, A. und Strambach, K.:

Über die Gruppe der Projektivitäten in nicht-
geschlossenen Ebenen.

Archiv der Mathematik, Vol. XVIII, 1967.

8 Siebenmann, L.C.:

A characterization of free projective planes.
Pacific J. Math. 15, 293 - 293; (1965).

L e b e n s l a u

Am 9. Juli 1941 wurde ich, Edith Schreiber geb. Götz, als zweites Kind des Malermeisters Johann Götz und seiner Ehefrau Marie Götz geb. Niederle in Pohler/Sudetenland geboren. Im Herbst 1946 wurden wir aus dem Sudetenland ausgewiesen und nahmen unseren Wohnsitz in Fellbach. Dort besuchte ich vom Herbst 1947 bis zum Herbst 1951 die Volksschule und anschließend bis zur Mittleren Reife im Frühjahr 1957 die Mittelschule. Anschließend absolvierte ich bis zum Juli 1959 eine Lehre bei der Deutschen Bank AG in Stuttgart-Bad Cannstatt. Vom August 1959 bis September 1960 weilte ich in England, um meine Sprachkenntnisse zu verbessern. Vom Oktober 1960 bis Februar 1966 war ich als Sekretärin in Stuttgart tätig und besuchte anschließend bis Juni 1968 das Staatliche Institut zur Erlangung der Hochschulreife am Friedrich-Eugens-Gymnasium in Stuttgart. Nach dem Abitur studierte ich Mathematik, und zwar 7 Semester in Tübingen, 1 Semester in Kiel und 4 Semester in Erlangen. Im November 1974 bestand ich die Diplom-Prüfung für Mathematik. Vom Dezember 1974 bis Dezember 1976 verwaltete ich die Assistentenstelle am Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik beim Fachbereich für Kultur- und Erziehungswissenschaften in Nürnberg. Vom Februar 1977 bis Mai 1978 war ich am Bezirksseminar Kleve im Vorbereitungsdienst für das Höhere Lehramt tätig. Seit Dezember 1977 bin ich mit Dr. Kolff Schreiber verheiratet und habe einen Sohn.

Edith Schreiber

SOFORTDRUCK BRAUNSCHWEIG

SOFORTDRUCK BRAUNSCHWEIG